RESISTENCIA DE MATERIALES, ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD

Autor: Jorge Perelli Botello

RETiNEO

Este documento es una recopilación de la teoría aplicada a la resolución de problemas de Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad.

No tiene, por tanto, el rigor teórico que se puede encontrar en cualquiera de los conocidos y numerosos libros que tratan de este asunto, ya que su objeto es constituir una guía de la teoría más importante e indispensable para poder resolver los problemas más habituales de la materia.

Se ha dividido en las tres partes:

- Parte 1: Resistencia de Materiales.
- Parte 2: Plasticidad.
- Parte 3: Elasticidad.

Se ha incluido un anejo con indicaciones de utilidad.

Los problemas pertenecientes a exámenes son siempre de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.

Espero que sea interesante para todos los que lo usen y ruego que sean generosos en perdonar los errores, que a buen seguro existen.

ELASTICIDAD

Autor: Jorge Perelli Botello

PARTE 3- ELASTICIDAD

CAPÍTULO 1- PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ELASTICIDAD LINEAL.

1.1- Sólido elástico.
1.2- Hipótesis básicas de la Elasticidad lineal.
1.3- Ecuaciones que intervienen en el cálculo elástico.

CAPÍTULO 2- ANÁLISIS DE TENSIONES.

2.1- Concepto de tensión. Vector tensión.
2.2- Esfuerzos.
2.3- Ecuaciones de equilibrio interno.
2.4- Tensor de tensiones.
2.5- Cambio de ejes.
2.6- Tensiones y direcciones principales.
2.7- Elipsoide de tensiones.
2.8- Tensión octaédrica.
2.9- Tensiones tangenciales máximas.
2.10- Descomposición del tensor de tensiones.

CAPÍTULO 3- MOVIMIENTOS Y DEFORMACIONES.

3.1- Desplazamientos.
3.2- Deformación longitudinal.
3.3- Deformación transversal.
3.4- Expresión de las deformaciones en función de los desplazamientos.
3.5- Movimientos de sólido rígido.
3.6- Tensor de deformaciones.
3.7- Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.
3.8- Descomposición del tensor de deformaciones.

CAPÍTULO 4- RELACIONES CONSTITUTIVAS O MIXTAS.

4.1- Ley de Hooke unidimensional.
4.2- Coeficiente de Poisson.
4.3- Ley de Hooke generalizada.

4.4- Módulo de rigidez transversal.
4.5- Módulo de compresión.
4.6- Ecuaciones de Lamé.

CAPÍTULO 5- ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL.

5.1- Introducción.
5.2- Deformación plana.
5.3- Tensión plana.
5.4- Tensiones sobre un plano.
5.5- Círculo de Mohr.
5.6- Representación gráfica.
5.7- Función de Airy.

CAPÍTULO 6- ELASTICIDAD EN COORDENADAS POLARES.

6.1- Elasticidad plana en coordenadas polares.
6.2- Tensiones principales.
6.3- Estados axilsimétricos.
6.4- Tubo circular sometido a presiones radiales.
6.5- Cargas concentradas en cuñas.
6.6- Chapa con taladro.
6.7- Tensiones en suelo bajo carga repartida.

CAPÍTULO 7- MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ.

7.1- Energía potencial total.
7.2- Energía elástica.
7.3- Energía potencial.
7.4- Método de Rayleigh-Ritz.

CAPÍTULO 8- TORSIÓN.

8.1- Introducción.
8.2- Torsión en sección circular.
8.3- Torsión en sección cualquiera. Método de las tensiones o de Prandtl.
8.4- Torsión en sección cualquiera. Método de los desplazamientos o de Saint Venant.
8.5- Método de Rayleigh-Ritz para torsión.

CAPÍTULO 1- PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ELASTICIDAD LINEAL

1.1- SÓLIDO ELÁSTICO

La Elasticidad lineal estudia el comportamiento del sólido elástico, definido como un sistema de puntos materiales deformable, continuo, elástico, homogéneo e isótropo.

- **Deformable:** Al aplicar cargas se deforma.
- **Continuo:** La distribución de masa es continua. Se puede derivar en el intervalo.
- **Elástico:** Al retirar las cargas desaparecen las deformaciones.
- **Lineal:** si se aplica el doble de carga, aparecen el doble de deformaciones.
- **Homogéneo:** Las propiedades no varían de un punto a otro.
- **Isótropo:** Las propiedades no cambian con la dirección.

1.2- HIPÓTESIS BÁSICAS DE LA ELASTICIDAD LINEAL

- El sólido es continuo y permanece continuo bajo la acción de las cargas exteriores.
- El principio de superposición de efectos es válido, en virtud de la linealidad.
- Existe un único estado de reposo sin tensiones en el sólido, al cual se vuelve cuando cesan las acciones.

1.3- ECUACIONES QUE INTERVIENE EN EL CÁLCULO ELÁSTICO

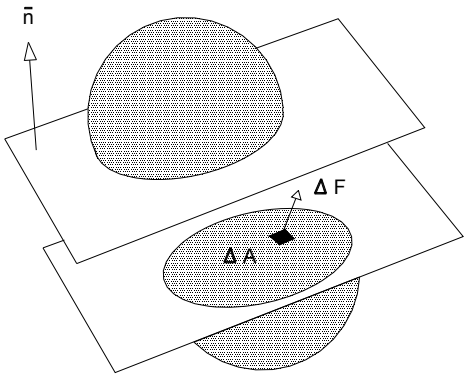
Todas las ecuaciones del cálculo elástico son lineales, y se pueden clasificar en tres grandes grupos:

- **ECUACIONES DE EQUILIBRIO O ESTÁTICAS:** Relacionan las fuerzas actuantes con las tensiones.
- **ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD O CINEMÁTICAS:** Representan las condiciones de compatibilidad entre los movimientos del sólido y sus deformaciones.
- **ECUACIONES CONSTITUTIVAS O MIXTAS:** Relacionan las tensiones con las deformaciones.

CAPÍTULO 2- ANÁLISIS DE TENSIONES

2.1- CONCEPTO DE TENSIÓN. VECTOR TENSIÓN

Sea un sólido elástico en equilibrio, sometido a un sistema de fuerzas externas. Para investigar lo que sucede en el interior del cuerpo, se corta por un plano imaginario, dividiendo el sólido en dos partes. El equilibrio en cada una de las partes requiere la presencia de fuerzas internas actuando en el plano de corte.



Si se toma la fuerza actuante ΔF sobre una porción ΔA, se define el vector tensión en un punto de la siguiente manera:

$$\boxed{\bar{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{d\overline{F}}{dA}}$$

VECTOR TENSIÓN TOTAL EN UN PUNTO SOBRE UN PLANO

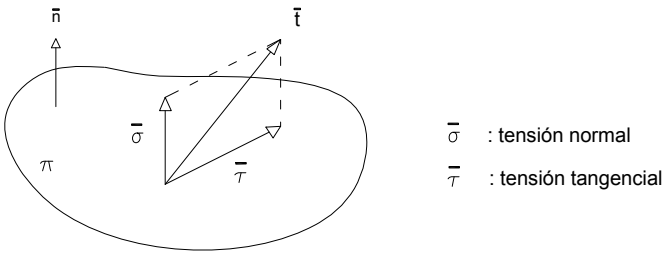
Por tanto, el vector tensión depende de la situación del punto y de la orientación del plano de corte. El vector $\overline{n}$ es unitario y perpendicular al plano que define.

$$\overline{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \qquad \left|\overline{n}\right| = \sqrt{n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + n_3^{\,2}} = 1$$

Las tensiones son fuerzas por unidad de superficie; por tanto, en el S.I. sus unidades son MPa o kN/m^2.

Componentes del vector tensión:

Las componentes intrínsecas del vector tensión son:



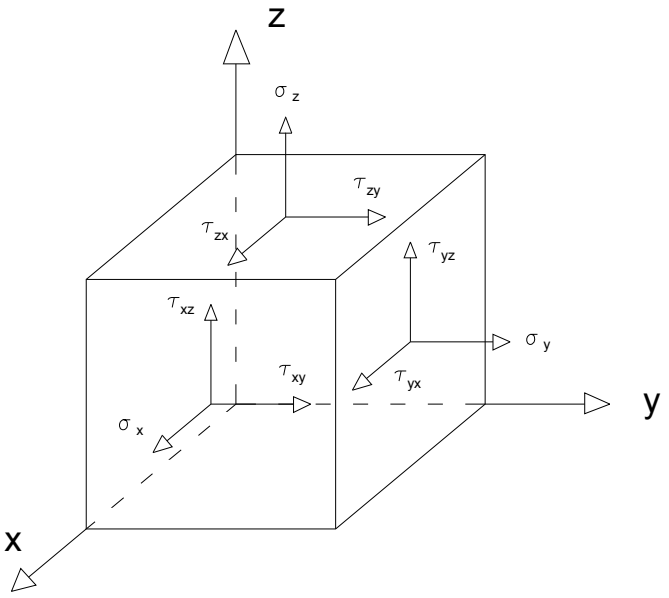
● Tensión normal:

MÓDULO $\boxed{\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t}}$ VECTOR $\boxed{\bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n}}$

● Tensión tangencial:

MÓDULO $\boxed{\tau = \sqrt{\left|\bar{t}\right|^2 - \left|\bar{\sigma}\right|^2}}$ VECTOR $\boxed{\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma}}$

En un cubo de dimensiones infinitesimales, las tensiones que aparecen son las siguientes:



La notación σ_{ij} - τ_{ij} obedece a lo siguiente:

- El primer subíndice indica qué eje es perpendicular al plano en el que actúa la componente.
- El segundo subíndice expresa a qué eje es paralela la componente.

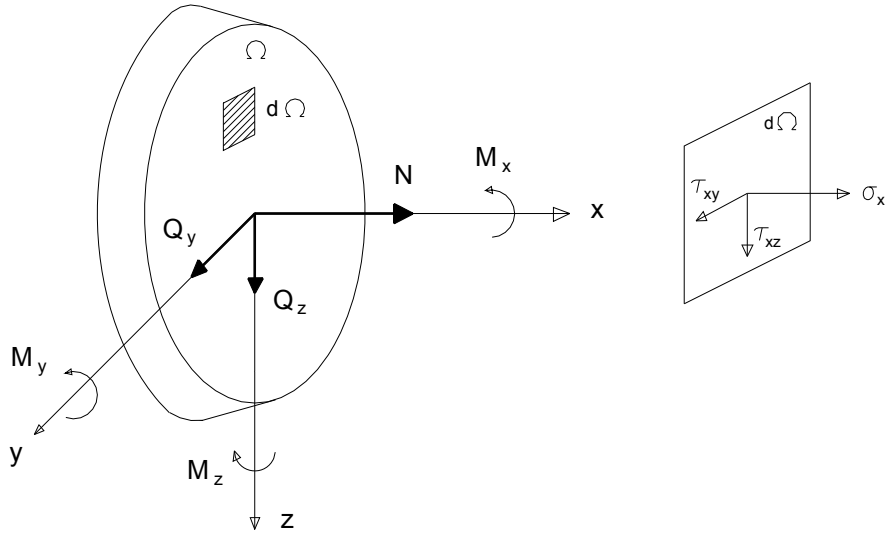
El convenio de signos es:

- Para la cara con i positivo como versor, la tensión es positiva si lleva j en sentido positivo.
- Para la cara con –i positivo como versor, la tensión es positiva si lleva el sentido de –j.

2.2- ESFUERZOS

Las tensiones actuantes en una sección pueden ser sustituidas por un sistema de fuerzas equivalentes denominadas esfuerzos.

En general, los esfuerzos consisten en una fuerza axil, dos cortantes, dos momentos flectores y un momento torsor.



Para obtener los esfuerzos, hay que integrar las tensiones.

AXIL: $$N = \iint_{\Omega} \sigma_x \cdot d\Omega$$

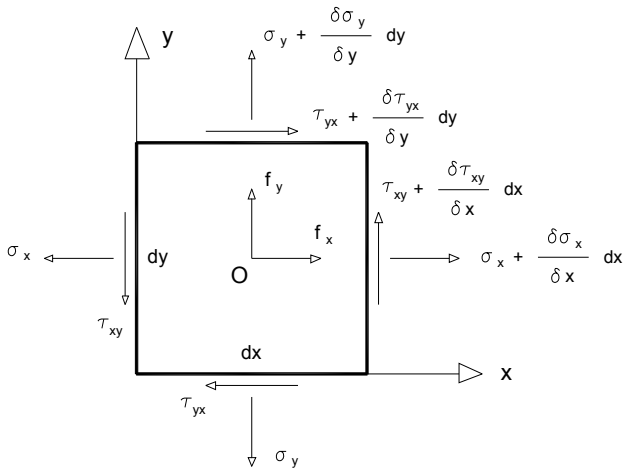
CORTANTES: $$Q_y = \iint_{\Omega} \tau_{xy} \cdot d\Omega \qquad Q_z = \iint_{\Omega} \tau_{xz} \cdot d\Omega$$

MOMENTOS FLECTORES: $$M_y = \iint_{\Omega} \sigma_x \cdot z \cdot d\Omega \qquad M_z = -\iint_{\Omega} \sigma_x \cdot y \cdot d\Omega$$

MOMENTO TORSOR: $$M_x = \iint_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \cdot d\Omega$$

2.3- ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO

Las componentes de tensión en un sólido generalmente varían de un punto a otro. En un caso bidimensional, las tensiones actuantes en un elemento diferencial de caras “dx” y “dy” y de espesor unidad son las siguientes:



f_x, f_y: Fuerzas por unidad de volumen (peso propio, fuerza centrífuga).

Para que exista equilibrio, se tiene que cumplir: $\Sigma F_H = 0$; $\Sigma F_V = 0$; $\Sigma M = 0$

Tomando momentos respecto a O, las tensiones normales y las fuerzas de masa dan momentos nulos. Se tiene:

$$2 \cdot \tau_{xy} \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - 2 \cdot \tau_{yx} \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

Por tanto, despreciando los términos infinitesimales de tercer orden:

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

y, análogamente

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned}}$$

Si ahora se hace $\Sigma F_H = 0$, se tiene:

$$(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy - \sigma_x \cdot dy + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot dy) \cdot dx - \tau_{xy} \cdot dx + f_x \cdot dx \cdot dy = 0$$

Se puede hacer también $\Sigma F_V = 0$. Simplificando, se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{aligned}}$$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO EN TENSIONES (2D)

Generalizando para tres dimensiones:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{aligned}}$$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO EN TENSIONES (3D)

2.4- TENSOR DE TENSIONES

Se conoce el estado tensional en un punto cuando, para cada orientación, se puede obtener el vector tensión asociado $\overline{t_n}$. Esta aplicación lineal entre los vectores $\overline{t_n}$ y $\overline{n}$ (normal a dicha orientación) constituye un tensor $\underline{T}$, que define el estado tensional en el punto.

$$\boxed{\overline{t_n} = \underline{T} \cdot \overline{n}}$$

FÓRMULA DE CAUCHY

Las componentes del tensor de tensiones son:

$$\boxed{\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}$$

TENSOR DE TENSIONES

Sustituyendo las componentes en la Fórmula de Cauchy, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

2.5- CAMBIO DE EJES

Si se desea cambiar la base de referencia, es preciso expresar los vectores $\bar{t}$ y $\bar{n}$ en esa nueva base, y también el tensor de tensiones.

$$\underbrace{\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}}_{\text{BASE ANTIGUA}} \xrightarrow{\text{CAMBIO DE BASE}} \underbrace{\bar{t}' = \underline{T}' \cdot \bar{n}'}_{\text{BASE NUEVA}}$$

Se considera una matriz de cambio de base G que relaciona los nuevos vectores con los antiguos, de la siguiente manera:

$$\bar{n} = G \cdot \bar{n}' \qquad\qquad \bar{t} = G \cdot \bar{t}'$$

Las columnas de G son los vectores unitarios de los nuevos ejes referidos a la antigua base.

$$[G] = [\{x'\} \quad \{y'\} \quad \{z'\}]$$

G es una matriz ortogonal ($G^{-1} = G^T$). Por lo tanto:

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \underline{T} \cdot G \cdot \bar{n}' = G \cdot \bar{t}'$$

De donde:

$$\bar{t}' = G^{-1} \cdot \underline{T} \cdot G \cdot \bar{n}' = G^T \cdot \underline{T} \cdot G \cdot \bar{n}' = \underline{T}' \cdot \bar{n}'$$

Entonces:

$$\boxed{\underline{T}' = G^T \cdot \underline{T} \cdot G}$$

2.6- TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES

De cara a dimensionar una estructura, un problema importante corresponde a la determinación de los valores máximo y mínimo del módulo del vector de tensiones y las direcciones de los planos correspondientes. En este caso, la tensión total $\bar{t}$ es paralela a la normal $\bar{n}$ y no existen tensiones tangenciales. Las direcciones de los planos se denominan principales y las tensiones, tensiones principales.

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \lambda \cdot \bar{n} \longrightarrow \boxed{\left|\underline{T} - \lambda \cdot I\right| = 0}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Este es un problema de obtención de autovalores y de autovectores. Hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Los autovalores de una matriz simétrica son todos reales.
- Los correspondientes autovectores son ortogonales.

Resulta la siguiente ecuación cúbica:

$$\boxed{\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0}$$

Con los siguientes invariantes:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \qquad \text{tensión cúbica}$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^{\ 2} - \tau_{xz}^{\ 2} - \tau_{yz}^{\ 2}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Si se adoptan como ejes de coordenadas los principales, el tensor de tensiones es diagonal:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales se ordenan de mayor a menor:

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

Hay que tener siempre la precaución de comprobar que los autovectores son unitarios y perpendiculares entre sí. Si hay dos tensiones principales iguales, el elipsoide de tensiones es de revolución, por lo que existe un conjunto infinito de parejas de direcciones principales.

Obtención de autovalores y autovectores con la calculadora programable

HP-48

- Introducir la matriz.
- Teclear MTH, MATR, EGV.
- Sale el vector de autovalores en (1) y los autovectores por columnas en (2). Se corresponden entre sí por el mismo orden.
- Como no salen unitarios, hay que normalizarlos. Se introduce el autovector en [ ] y se pulsa ENTER dos veces.
- Pulsar MTH, VECTR, ABS y da el módulo del vector.
- Pulsar ÷ y ya se tiene el autovector normalizado.
- Repetir el proceso con los otros dos autovectores.
- Comprobar que resultan perpendiculares entre sí.

HP-49

- Teclear MTH, MATRIX, EGV e introducir la matriz con MTRW. Salen los autovectores por columnas y en la última fila los autovalores.
- Se puede hacer también con la tecla MATRICES.
- Todo lo demás es igual que en la HP-48, aunque también se puede hacer:

$$\bar{n} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}}{\left(ABS\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}\right)}$$

2.7- ELIPSOIDE DE TENSIONES

Es el lugar geométrico de los extremos del vector de tensiones, al variar los planos que pasan por el punto. Si se considera el origen de coordenadas en el punto, se tiene:

$x = t_x$

$y = t_y$

$z = t_z$

Y la ecuación del elipsoide de tensiones es:

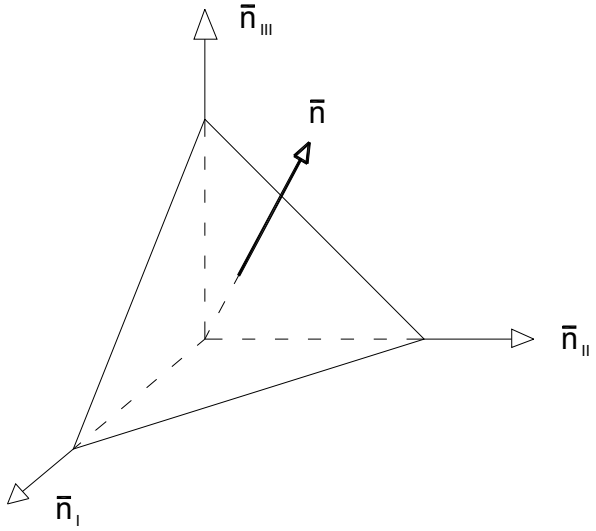
$$\begin{vmatrix} x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ y & \sigma_y & \tau_{yz} \\ z & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \sigma_x & x & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & z & \sigma_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & x \\ \tau_{xy} & \sigma_y & y \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & z \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}^2$$

Esta ecuación puede simplificarse si se adoptan como ejes de coordenadas los principales, quedando:

$$\boxed{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1}$$

2.8- TENSIÓN OCTAÉDRICA

El vector tensión octaédrica da una idea de la magnitud de la tensión en un punto (de "cuánto está de cargado"). Utilizando como base de referencia los ejes principales:



El vector tensión octaédrica representa la tensión que se produce en los planos normales a la recta bisectriz de los ejes principales, es decir, al plano cuya normal es:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{Bmatrix}$$

Las tensiones normales y tangenciales son:

$$\boxed{\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})}$$

TENSIÓN NORMAL OCTAÉDRICA

$$\boxed{\tau = \sqrt{\left|\bar{t}\right|^2 - \sigma^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}}$$

TENS. TANGENCIAL OCTAÉDRICA

2.9- TENSIONES TANGENCIALES MÁXIMAS

Si se desean obtener las tensiones tangenciales máximas, la solución se encuentra en los planos bisectores de los planos principales.

El valor de la tensión tangencial máxima es:

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_I - \sigma_{III})}$$

El vector que define la dirección donde se encuentra la tensión tangencial máxima es:

$$\boxed{\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\bar{n}_I + \bar{n}_{III})}$$

2.10- DESCOMPOSICIÓN DEL TENSOR DE TENSIONES

El tensor de tensiones referido a los ejes principales puede descomponerse en dos: tensor esférico y tensor desviador.

El tensor esférico tiene todos los valores de la diagonal principal iguales a la tensión normal octaédrica.

El tensor desviador es la diferencia entre el total y el esférico.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{no} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{no} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{no} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{no} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{no} \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\sigma_{no} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

CAPÍTULO 3- MOVIMIENTOS Y DEFORMACIONES

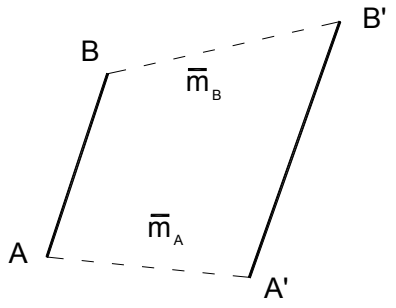
3.1- DESPLAZAMIENTOS

El vector desplazamiento es una función continua del punto a considerar.

$$\overline{m} = u \cdot \overline{x_1} + v \cdot \overline{x_2} + w \cdot \overline{x_3}$$

3.2- DEFORMACIÓN LONGITUDINAL

La aparición de tensiones en un sólido se produce no por los movimientos absolutos de sus puntos, sino por las separaciones o acercamientos de sus partículas, o sea, por las deformaciones. La deformación longitudinal en una dirección es el alargamiento o acortamiento unitario que experimenta un elemento lineal infinitamente pequeño, según esa dirección, al deformarse el sólido. Se consideran positivos los alargamientos y es adimensional.



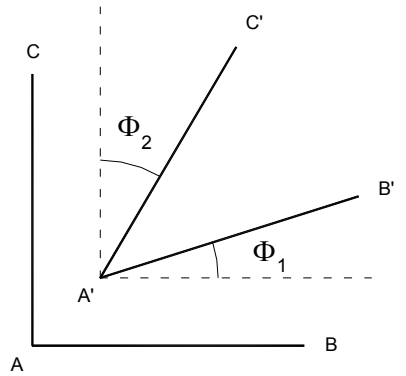
$$\varepsilon_{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

3.3- DEFORMACIÓN TRANSVERSAL

La deformación transversal (o tangencial) entre dos direcciones perpendiculares entre sí se mide por la semivariación del ángulo que forman dos segmentos infinitamente pequeños al producirse la deformación del sólido, según ambas direcciones. Es positiva si se produce un cierre del ángulo.

$$\gamma_{AB,AC} = \Phi_1 + \Phi_2$$

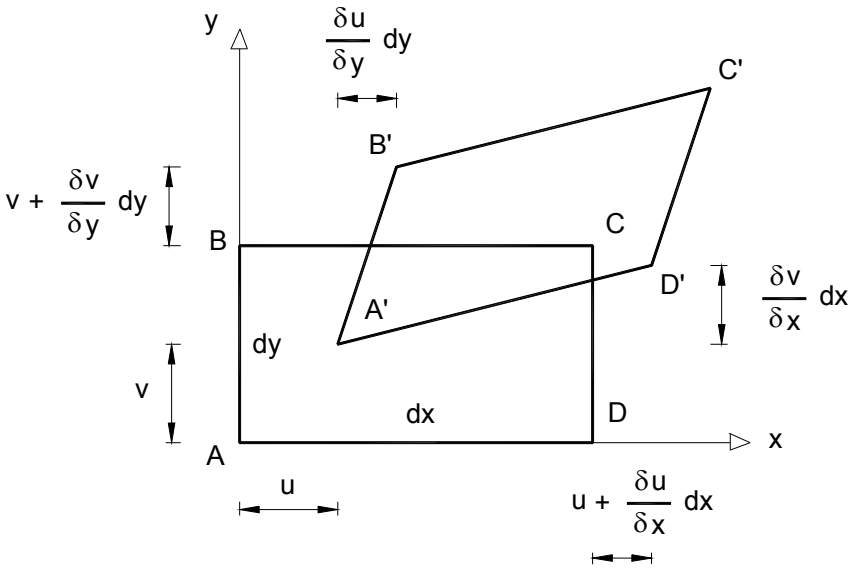
$$\varepsilon_{AB,AC} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$$



ε determina la contribución de cada lado a la deformación total.

3.4- EXPRESIÓN DE LAS DEFORMACIONES EN FUNCIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Si se supone un caso bidimensional, se tiene:



Se tienen, por lo tanto (extrapolando a 3-D), las siguientes deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Las rotaciones son los giros que se producen en las bisectrices de los ángulos que forman los segmentos.

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \omega_{xy} = -\omega_{yx}$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \omega_{yz} = -\omega_{zy}$$

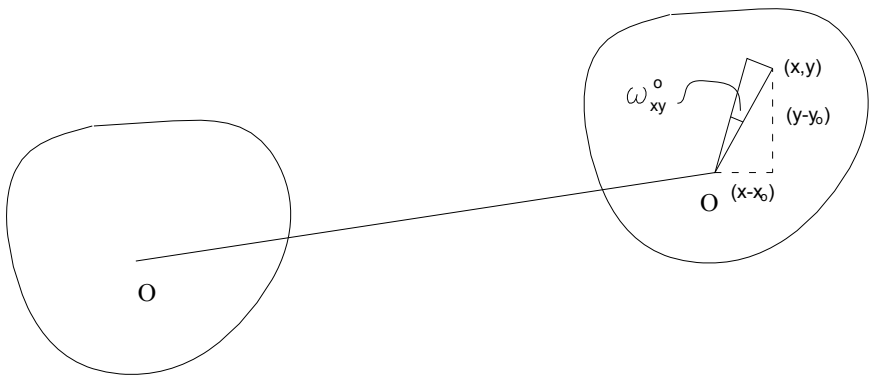
$$\omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \omega_{zx} = -\omega_{xz}$$

3.5- MOVIMIENTOS DE SÓLIDO RÍGIDO

Los movimientos que se producen en un sólido tienen las siguientes componentes:

- Una traslación de componentes (u_o v_o w_o).
- Una rotación de componentes $(\omega_{xy}, \omega_{yz}, \omega_{zx})$.
- Deformaciones longitudinales (ε_x ε_y ε_z).
- Deformaciones tangenciales (γ_{xy} γ_{yz} γ_{xz}).

Las dos primeras recogen el movimiento como sólido rígido.



Por tanto, los movimientos de sólido rígido serán una suma de TRASLACIÓN + GIROS x BRAZOS.

$$\left.\begin{aligned} u_{SR}(x,y,z) &= u_0 - \omega^0_{xy}\cdot[y-y_0] + \omega^0_{zx}\cdot[z-z_0] \\ v_{SR}(x,y,z) &= v_0 - \omega^0_{yz}\cdot[z-z_0] + \omega^0_{xy}\cdot[x-x_0] \\ w_{SR}(x,y,z) &= w_0 - \omega^0_{zx}\cdot[x-x_0] + \omega^0_{yz}\cdot[y-y_0] \end{aligned}\right\} \quad \textbf{MOVIMIENTOS DE SÓLIDO RÍGIDO}$$

Siendo los valores (u_0 v_0 w_0) los movimientos del centro de giro del sólido y los valores $(\omega^0_{xy}, \omega^0_{yz}, \omega^0_{zx})$ las rotaciones del centro de giro. Considerando las k_i^j valores constantes, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} u_{SR}(x,y,z) &= k_1 + k_2\cdot y + k_3\cdot z \\ v_{SR}(x,y,z) &= k'_1 + k'_2\cdot x + k'_3\cdot z \\ w_{SR}(x,y,z) &= k''_1 + k''_2\cdot x + k''_3\cdot y \end{aligned}\right\} \quad \textbf{MOVIMIENTOS DE SÓLIDO RÍGIDO}$$

Se pueden comprobar los valores:

$$\varepsilon_x^{SR} = \frac{\partial u_{SR}}{\partial x} = 0 = \varepsilon_y^{SR} = \varepsilon_z^{SR}$$

$$\gamma_{xy}^{SR} = \frac{\partial v_{SR}}{\partial x} + \frac{\partial u_{SR}}{\partial y} = 0 = \gamma_{xz}^{SR} = \gamma_{yz}^{SR}$$

$$\omega_{xy}^{SR} = \omega_{xy}^{0}$$

$$\omega_{yz}^{SR} = \omega_{yz}^{0}$$

$$\omega_{zx}^{SR} = \omega_{zx}^{0}$$

Los movimientos de sólido rígido no provocan, por tanto, deformaciones longitudinales ni tangenciales.

3.6- TENSOR DE DEFORMACIONES

El tensor de deformaciones es:

$$\boxed{\underline{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}$$

Los autovectores del tensor de deformaciones son los mismos que los del tensor de tensiones. Representan las direcciones donde no existe deformación tangencial.

Si $\overline{\varepsilon_n}$ es el vector deformación por unidad de longitud en la dirección $\overline{n}$, se tiene:

$$\boxed{\overline{\varepsilon_n} = \underline{D} \cdot \overline{n}}$$

De donde se tiene:

DEFORMACIÓN LONGITUDINAL: $\varepsilon = \overline{n}^T \cdot \overline{\varepsilon_n}$

DEFORMACIÓN TANGENCIAL: $\gamma = \sqrt{\left|\overline{\varepsilon_n}\right|^2 - \varepsilon^2}$

La deformación tangencial (o transversal) máxima es:

$$\boxed{\gamma_{MAX} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III}}$$

Y se produce en la dirección:

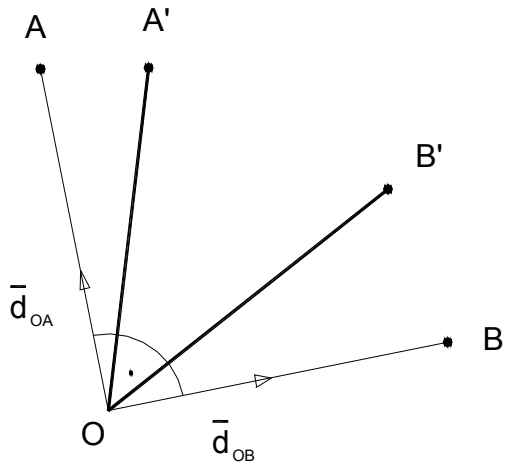
$$\boxed{\overline{n}_{\gamma_{MAX}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\overline{n}_I + \overline{n}_{III})}$$

Cambio de base:

$$\boxed{\underline{D'} = G^T \cdot \underline{D} \cdot G}$$

Donde G es la matriz de cambio de base, cuyas columnas son los vectores unitarios de los nuevos ejes referidos a la base antigua.

Deformación angular en un punto O:



$\bar{d}_{OA}$ y $\bar{d}_{OB}$ son los vectores unitarios de cada dirección.

La deformación angular del punto es:

$$\boxed{\gamma_{OA,OB} = 2 \cdot \bar{d}_{OA}^T \cdot \underline{D}^O \cdot \bar{d}_{OB} = 2 \cdot \bar{d}_{OB}^T \cdot \underline{D}^O \cdot \bar{d}_{OA}}$$

3.7- ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Si se conocen las funciones continuas y derivables de los desplazamientos, es posible obtener las deformaciones en un punto. En cambio, si se conoce el campo de deformaciones, en general no es posible conocer los desplazamientos, excepto si se satisface una serie de relaciones entre las deformaciones que se denominan ecuaciones de compatibilidad, y que son:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \cdot \partial z}$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \cdot \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Para que el campo de movimientos sea único, además de cumplirse estas ecuaciones, el sólido debe ser simplemente conexo (sin agujeros).

3.8- DESCOMPOSICIÓN DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Al igual que el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones referido a los ejes principales puede descomponerse en dos: tensor esférico y tensor desviador.

El tensor esférico tiene todos los valores de la diagonal principal iguales.

El tensor desviador es la diferencia entre el total y el esférico.

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$

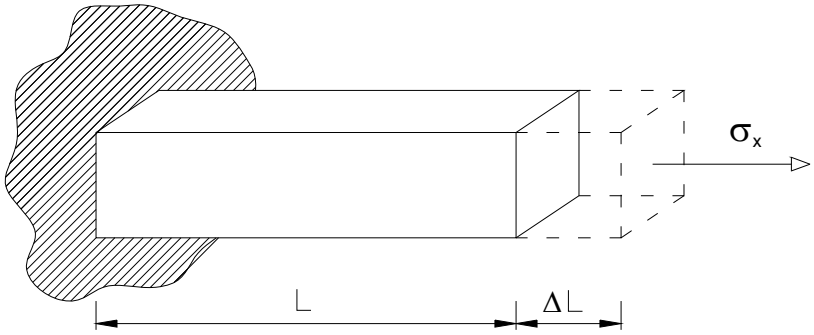
El tensor esférico representa un estado de deformación donde sólo existe cambio de volumen.

El tensor desviador representa un estado donde no hay deformación volumétrica, sino únicamente cambio de forma.

CAPÍTULO 4- RELACIONES CONSTITUTIVAS O MIXTAS

Son las relaciones entre tensiones y deformaciones.

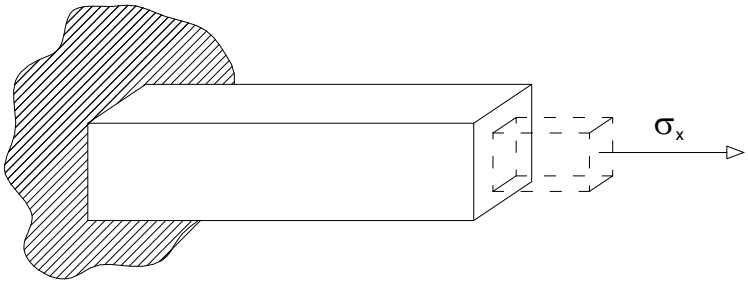
4.1- LEY DE HOOKE UNIDIMENSIONAL



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \qquad \boxed{\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x}$$

4.2- COEFICIENTE DE POISSON

En realidad, al aplicar una tensión en un cuerpo elástico, lineal, homogéneo e isótropo se producen deformaciones en la dirección de la tensión y en el resto de direcciones.



$$\boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x}$$

ν : Coeficiente de Poisson. Es adimensional; depende también del material y da una idea de la compresibilidad del sólido. Debe ser ν < 0.50. Si ν = 0.50 el cuerpo es incompresible.

4.3- LEY DE HOOKE GENERALIZADA

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

DEFORMACIÓN CÚBICA

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

TENSIÓN CÚBICA

4.4- MÓDULO DE RIGIDEZ TRANSVERSAL

Es un coeficiente que depende también del material.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

4.5- MÓDULO DE COMPRESIÓN

Es otro coeficiente que depende del material.

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$$

4.6- ECUACIONES DE LAMÉ

Son las ecuaciones que dan las tensiones en función de las deformaciones.

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz} \end{aligned}}$$

Con: $\lambda = \dfrac{E \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)}$ CONSTANTE DE LAMÉ

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Relaciones entre constantes:

$$\lambda = K - \frac{2}{3} \cdot G = \frac{3 \cdot K \cdot \nu}{1+\nu}$$

$$G = \frac{3}{2} \cdot (K - \lambda) = \frac{3 \cdot K \cdot E}{9 \cdot K - E}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} = \frac{3 \cdot K - E}{6 \cdot K}$$

$$E = \frac{9 \cdot K \cdot G}{3 \cdot K + G} = 3 \cdot K \cdot (1 - 2\nu)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \cdot G = \frac{G \cdot E}{3 \cdot (3 \cdot G - E)} = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$$

Tricar 1.

En un punto O de un sólido elástico se sitúan unos ejes coordenados cartesianos. Al someterlo a un estado de tensión, las tensiones principales σ' y sus cosenos directores, l', m', n', tienen los valores que se indican más abajo (tensiones en MPa).

Con otro estado de tensiones, independiente del anterior, se obtienen respectivamente σ'' y l'', m'', n''.

ESTADO 1

σ'	l'	m'	n'
10	0	1	0
2	0	0	1
-5	1	0	0

ESTADO 2

σ''	l''	m''	n''
4	1	0	0
-2	0	1/2	$\sqrt{3}/2$
-10	0	$\sqrt{3}/2$	-1/2

Si ambos estados actúan a la vez, determinar:

1. Valores y signos de las tensiones (tensor de tensiones).
2. Valores con signo de las tensiones principales y direcciones correspondientes, definidas por sus cosenos directores.
3. Representar las soluciones en dos croquis en perspectiva.

Enunciado: (Brevdas, Práctica 00-01) Tricar 1 (30')

En un punto O de un sólido elástico se sitúan unos ejes elásticos cartesianos. Al someterlo a un estado de tensión, las tensiones principales σ' y sus cosenos directores l', m', n' tienen los valores que se indican más abajo (tensiones en MPa.) Con otro estado de tensiones, independiente del anterior, se obtienen respectivamente σ'' y l'', m'', n''.

ESTADO 1

σ'	l'	m'	n'
10	0	1	0
2	0	0	1
-5	1	0	0

ESTADO 2

σ''	l''	m''	n''
4	1	0	0
-2	0	1/2	$\sqrt{3}/2$
10	0	$\sqrt{3}/2$	-1/2

Si ambos estados actúan a la vez, determinar

1) Valores y signos de las tensiones (tensor de tensiones).
2) Valores con signo de las tensiones principales y direcciones correspondientes, definidas por sus cosenos directores.
3) Representar las soluciones en dos croquis en perspectiva.

Resolución

1) En el primer estado se tiene:

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_y = 10 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{T_1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{T_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_x = -5 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, el tensor de tensiones en el estado 1 será:

$$\underline{T_1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{en MPa}$$

Y en el estado 2 :

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{T_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_x = 4 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \underline{T_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = \frac{\tau_{xy}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \tau_{xz}}{2} \quad \checkmark \\ -1 = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \tau_{yz}}{2} \\ -\sqrt{3} = \frac{\tau_{yz}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sigma_z}{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5\sqrt{3} \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{T_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = \frac{\sqrt{3}\,\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xz}}{2} \quad \checkmark \\ -5\sqrt{3} = \frac{\sigma_y \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{\tau_{yz}}{2} \\ 5 = \frac{\tau_{yz} \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \end{array} \right.$$

Resolviendo queda:

$$\underline{T_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} \quad \text{en MPa}$$

Otra manera de hacerlo es planteando un cambio de base.

$$\underline{T_1}' = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \underline{T}' = G^T \cdot \underline{T} \cdot G \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la matriz G de cambio de base, cuyas columnas son los vectores unitarios de la nueva base (la de los ejes principales) referidos a los antiguos (los coordenados). Como G es ortogonal:

$$G^{-1} = G^T \Longrightarrow \underline{T}' = G^{-1} \cdot \underline{T} \cdot G \rightarrow \boxed{\underline{T} = G \cdot \underline{T} \cdot G^T}$$

$$\underline{T_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{en MPa}$$

Y lo mismo sucede con $\underline{T}_2$.

Si ambos estados actúan a la vez, por superposición de cargas:

$$\boxed{\underline{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \quad \text{en MPa}}$$

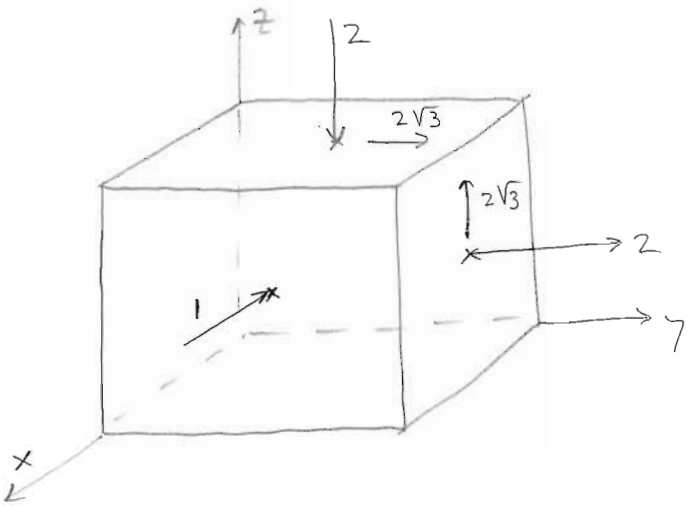
2) Tensiones y direcciones principales. Con la HP:

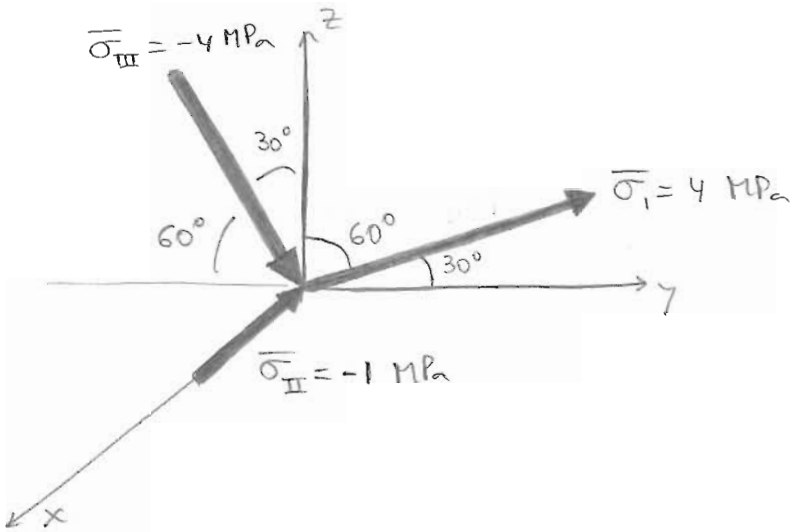
$$\sigma_I = 4 \text{ MPa} \longrightarrow \bar{e}_I = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -1 \text{ MPa} \longrightarrow \bar{e}_{II} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{III} = -4 \text{ MPa} \longrightarrow \bar{e}_{III} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

3) Croquis de las soluciones:





NOTA: Problema de tensores de tensiones actuando simultáneamente.

Enunciado: (Práctica 2, curso 2000-2001) Tricar 2

Indicar si los siguientes tensores de deformación representan o no un estado de deformación posible. En caso afirmativo, obtener el alargamiento del segmento AB, siendo A(0,1,2) y B(4,3,5)

Tensor 1:

$$\varepsilon_x = K(x^2-y^2)z^2 \qquad \varepsilon_y = Kz^2y \qquad \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0 \qquad \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 3x^2z$$

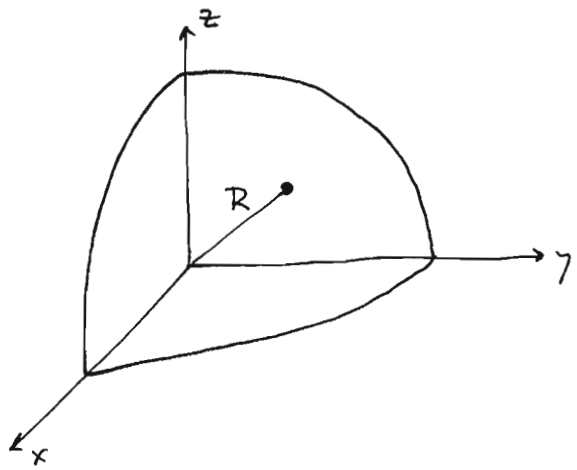
Tensor 2:

$$\varepsilon_x = 3xy^2 \qquad \varepsilon_y = 3yx^2 \qquad \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = 3xy(x+y) \qquad \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0$$

Si las deformaciones posibles provienen exclusivamente de fuerzas exteriores (no se consideran efectos debidos a retracción, temperatura, deformaciones impuestas, etc.) comprobar si hay cargas másicas y, en su caso, calcularlas.

Deducir la distribución de fuerzas en el contorno del octante del sólido esférico que se representa en la figura.



Resolución:

Dado un campo de movimientos se obtiene un único campo de deformaciones. En cambio, si se tiene un campo de deformaciones, hay que integrar para obtener el campo de movimientos y, debido a las constantes de integración el campo de movimientos no será único. Como se necesita que las deformaciones sean compatibles con los movimientos, es preciso que se cumplan las ecuaciones de compatibilidad

• Tensor 1:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} K(x^2-y^2)z^2 & 0 & 0 \\ 0 & Kz^2y & \frac{3}{2}x^2z \\ 0 & \frac{3}{2}x^2z & 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Rightarrow -2Kz^2 + 0 = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \Rightarrow 2Ky + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \Rightarrow 0 + 2K(x^2-y^2) = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \Rightarrow -8Kyz = \frac{\partial}{\partial x}(-6xz) = -6z$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial y}(6xz) = 0 \quad \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial z}(6xz) = 6x \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = -2Kyz^2 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = -2Kz^2 \qquad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = 2Kz(x^2-y^2) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2K(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = 0 = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = 2Kzy \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = 2Ky$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = -4Kyz \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 6xz \qquad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

No cumple las ecuaciones de compatibilidad, luego no es un estado de deformaciones posible.

• Tensor 2:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Rightarrow 6x + 6y = 6x + 6y \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \Rightarrow 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \Rightarrow 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

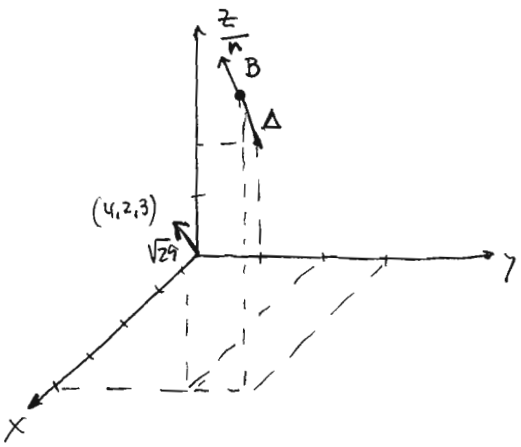
$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \Rightarrow 2 \cdot 0 = \frac{\partial}{\partial x}(-0+0+0) \quad \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \Rightarrow 2 \cdot 0 = \frac{\partial}{\partial y}(0-0+0) \quad \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \Rightarrow 2 \cdot 0 = \frac{\partial}{\partial z}(0+0-0) \quad \checkmark$$

Por tanto, el estado de deformación que representa el tensor 2 es posible

La variación en la longitud del segmento $\overline{AB}$: $\left| \begin{array}{l} A(0,1,2) \\ B(4,3,5) \end{array} \right.$ será:



$$\overline{AB} = (4,2,3)$$

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} 0'7428 \\ 0'3714 \\ 0'5571 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4/\sqrt{29} \\ 2/\sqrt{29} \\ 3/\sqrt{29} \end{Bmatrix}$$

(Es mejor normalizar $\overline{AB}$ con la HP)

La componente longitudinal de la deformación será:

$$\varepsilon = \bar{n}^T \cdot \underline{D} \cdot \bar{n} = \begin{Bmatrix} 0'7428 & 0'3714 & 0'5571 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 3xy^2 & \frac{3}{2}xy(x+y) & 0 \\ 0 & 3yx^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'7428 \\ 0'3714 \\ 0'5571 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 2'2284\,xy^2 & 1'1142(x^2y + xy^2) + 1'1142\,yx^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'7428 \\ 0'3714 \\ 0'5571 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon = 1'6553\,xy^2 + 0'4138\,x^2y \cdot 2 + 0'4138\,xy^2 = 2'0691\,xy^2 + 0'8276\,x^2y}$$

Para el segmento AB será:

$$\Delta L_{AB} = \int_A^B \varepsilon \, ds = \int_A^B \left(2'0691\, xy^2 + 0'8276\, x^2 y\right) ds$$

Hay que poner todo en función de s:

$$\left| \begin{array}{l} x = 0'7428 \cdot s \\ y = 0'3714 \cdot s \\ z = 0'5571 \cdot s \end{array} \right. \quad \text{(multiplicando por los cosenos directores de } \overline{n}\text{)}$$

$$\Delta L_{AB} = \int_A^B \left(2'0691 \cdot 0'7428 \cdot s \cdot 0'3714^2 s^2 + 0'8276 \cdot 0'7428^2 s^2 \cdot 0'3714 s\right) ds =$$

$$= \int_A^B \left(0'381593\, s^3\right) ds = 0'381593 \left.\frac{s^4}{4}\right|_A^B = 0'0954\, s^4 \Big|_A^B$$

$$s = \sqrt{29} \Rightarrow s^4 = 841 \Rightarrow \boxed{\Delta L_{AB} = 80'23}$$

Hay que comprobar ahora si existen cargas másicas. Para ello, es preciso obtener las tensiones con las ecuaciones de Lamé.

$$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y \qquad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z \qquad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}.$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad \text{Sustituyendo:}$$

$$e = 3xy^2 + 3yx^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_x = \lambda\left(3xy^2 + 3yx^2\right) + 2G \cdot 3xy^2 = xy^2\left(3\lambda + 6G\right) + 3\lambda y x^2 \\ \sigma_y = \lambda\left(3xy^2 + 3yx^2\right) + 2G \cdot 3yx^2 = x^2 y\left(3\lambda + 6G\right) + 3\lambda x y^2 \\ \sigma_z = \lambda\left(3xy^2 + 3yx^2\right) = 3\lambda x y^2 + 3\lambda x^2 y \\ \tau_{xy} = G \cdot 3xy(x+y) = 3Gx^2 y + 3Gxy^2 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

Ahora hay que aplicar las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{array}\right.$$

$$f_x = \frac{-\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -y^2(3\lambda + 6G) - 6\lambda xy - 3Gx^2 - 6Gxy =$$

$$= -3\lambda y^2 - 6Gy^2 - 6\lambda xy - 3Gx^2 - 6Gxy = \underline{\underline{y^2(-3\lambda - 6G) + x^2(-3G) + xy(-6\lambda - 6}}$$

$$f_y = \frac{-\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -6Gxy - 3Gy^2 - x^2(3\lambda + 6G) - 6\lambda xy =$$

$$= -6Gxy - 3Gy^2 - 3\lambda x^2 - 6Gx^2 - 6\lambda xy = \underline{\underline{y^2(-3G) + x^2(-3\lambda - 6G) + xy(-6\lambda - 6G}}$$

$$f_z = \frac{-\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

Fuerzas en el contorno del octante:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftarrow$ ecuación del octante

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} xy^2(3\lambda + 6G) + 3\lambda x^2 y & 3Gx^2y + 3Gxy^2 & 0 \\ 3Gx^2y + 3Gxy^2 & x^2y(3\lambda + 6G) + 3\lambda xy^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda xy^2 + 3\lambda x^2 y \end{pmatrix}$$

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} \dfrac{x}{R} \\[2ex] \dfrac{y}{R} \\[2ex] \dfrac{z}{R} \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{t} = \frac{1}{R}\begin{Bmatrix} x^2y^2(3\lambda + 6G) + 3\lambda x^3 y + 3Gx^2y^2 + 3Gxy^3 \\ 3Gx^3y + 3Gx^2y^2 + x^2y^2(3\lambda + 6G) + 3\lambda xy^3 \\ 3\lambda xy^2 z + 3\lambda x^2 y z \end{Bmatrix}$$

PROBLEMA: Se da el tensor de deformaciones y a partir de él se obtiene todo lo demás.

Tricar 3.

La ménsula de la figura tiene como sección transversal un triángulo isósceles, tal y como se muestra. En su extremo libre está sometido a una carga distribuida sobre dicha sección transversal, cuya resultante, de valor P, pasa por el centro de gravedad de la misma. Las constantes del material de que está constituida son E y ν y su peso propio se supone nulo.

Sea el campo de tensiones definido por:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \; ; \qquad \tau_{xz} = K\,[-x^2 + a\cdot(2\cdot a + y)] \quad ; \quad \tau_{yz} = K\cdot x\cdot(a - y) \; ; \qquad \sigma_z = -P\cdot(L - z)\cdot x / I_y \; ;$$

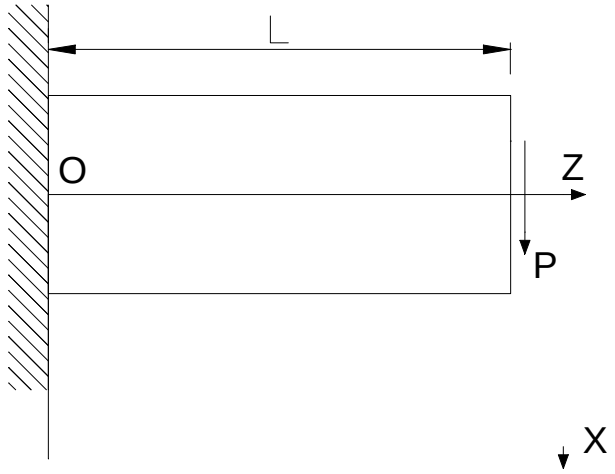
donde K representa un valor constante. Se pide:

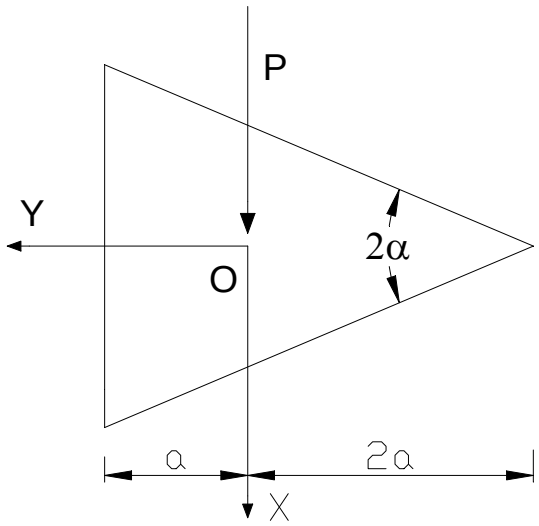
1. Mostrar que el campo de tensiones anterior no es, en general, solución del problema elástico planteado.

2. Obtener las condiciones que deben cumplir el ángulo α, definido en la figura, y el coeficiente de Poisson ν del material, para que el campo de tensiones sí sea la solución elástica del problema.

3. Calcular el valor de la constante K para el o los casos en que exista solución.

(Examen de junio de 2000)





Enunciado: **EXAMEN JUNIO 2000** Tricar 3 (45')

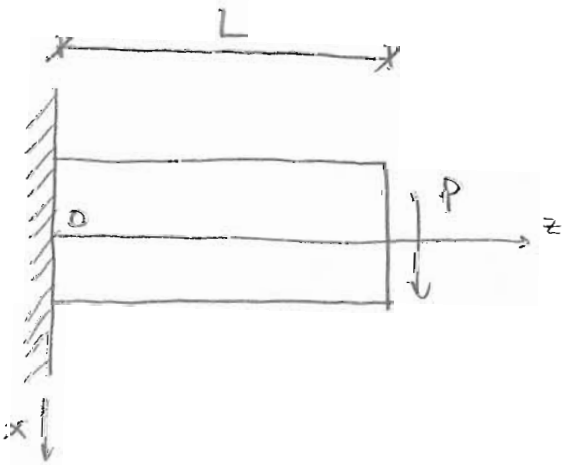
La ménsula de la figura tiene como sección transversal un triángulo isósceles, como se muestra. En su extremo libre está sometido a una carga distribuida sobre dicha sección transversal, cuya resultante, de valor P, pasa por el centro de gravedad de la misma. Las constantes del material de que está constituida son E y ν, y su peso propio se supone nulo.

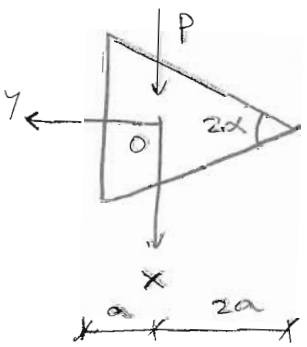
Sea el campo de tensiones definido:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = K\left[-x^2 + a(2a+y)\right] \\ \tau_{yz} = K \cdot x \cdot (a-y) \\ \sigma_z = -P(L-z) \cdot x / I_y \end{cases}$$

donde K representa un valor constante. Se pide:

1) Mostrar que el campo de tensiones anterior no es, en general, solución del problema elástico planteado.
2) Obtener las condiciones que deben cumplir el ángulo α, definido en la figura, y el coeficiente de Poisson ν del material, para que el campo de tensiones sí sea la solución elástica del problema.
3) Calcular el valor de la constante K para el o los casos en que exista solución.





Resolución:

1) Para que el campo de tensiones dado sea solución del problema elástico planteado, debe cumplir:

- Ecuaciones de equilibrio.
- Ecuaciones de compatibilidad.
- Condiciones de contorno.

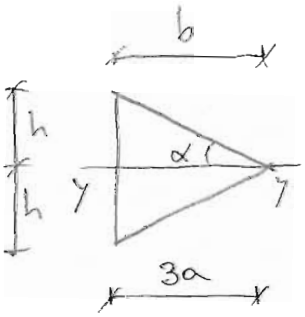
• Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \cancel{f_x}^{\,0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \cancel{f_y}^{\,0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \cancel{f_z}^{\,0} = 0 \Rightarrow -2Kx - Kx + \frac{P \cdot x}{I_y} = 0$$

$$K = \frac{P}{3 I_y}$$



$$I_y = \frac{1}{6} b h^3 \qquad tg\,\alpha = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\,tg\,\alpha$$

$$b = 3a$$

$$I_y = \frac{1}{6} b^4 tg^3\alpha = \frac{1}{6} 81 a^4 tg^3\alpha = \frac{27}{2} a^4 tg^3\alpha$$

Luego:

$$\boxed{K = \frac{P}{3\frac{27}{2} a^4 tg^3\alpha} = \frac{2P}{81 a^4 tg^3\alpha}}$$

• Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.

Hay que obtener antes las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{\nu P}{E}(L-z)\frac{x}{I_y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{\nu P}{E}(L-z)\frac{x}{I_y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{-P}{E}(L-z)\frac{x}{I_y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \qquad \gamma_{xz} = \frac{K}{G}\left[-x^2 + a(2a+y)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{Kx}{G}(a-y)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \longrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \longrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \longrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \longrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

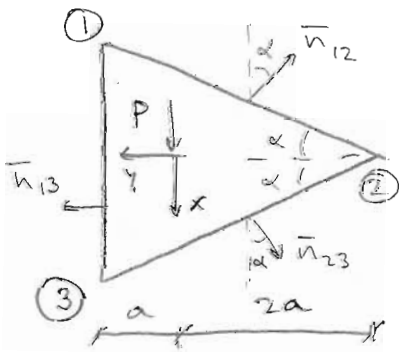
$$2\frac{(-P \cdot \nu)}{E \cdot I_y} = \frac{-K}{G} \longrightarrow K = \frac{2P\nu G}{E \cdot I_y} \qquad \text{Como } K = \frac{P}{3I_y} \longrightarrow G = \frac{E}{6\nu}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \longrightarrow \boxed{\nu = 0'5}$$

Por lo tanto, en general no es solución del problema elástico

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \longrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

2) Condiciones de contorno



Cara 1 - 2 : $\bar{n}_{12} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

Cara 2 - 3 : $\bar{n}_{23} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

Cara 1 - 3 : $\bar{n}_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

• <u>CARA 1 - 3:</u> $y = a$

$\sigma_y = 0 \checkmark$

$\tau_{xy} = 0 \checkmark$

$\tau_{yz} = 0 \checkmark$

No saco nada

• CARA ② – ③ : $y = \dfrac{x}{tg\,\alpha} - 2a \rightarrow x = (y+2a)\,tg\,\alpha$

Aplicando Cauchy:

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz}\cdot\cos\alpha - \tau_{yz}\operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

Como $\bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ queda:

$$\tau_{xz}\cdot\cos\alpha - \tau_{yz}\cdot\operatorname{sen}\alpha = 0$$

Sustituyendo primero los tensiones y luego la ecuación de la recta

$$K\left[-x^2 + a(2a+y)\right]\cos\alpha - K\cdot x\,(a-y)\operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$K\left[-tg^2\alpha\,(y^2+4ay+4a^2) + 2a^2 + ay\right]\cos\alpha - K\cdot tg\,\alpha\,(y+2a)(a-y)\operatorname{sen}\alpha = 0$$

Resolviendo queda: $-3\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

• CARA $z = L$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$

τ_{xz}: $P = \iint_\Omega \tau_{xz}\,d\Omega = \displaystyle\int_{y=-2a}^{y=a}\int_{x=-tg\alpha(y+2a)}^{x=tg\alpha(y+2a)} K\left[-x^2 + a(2a+y)\right]dx\,dy =$

$$= \int_{-2a}^{a}\int_{-tg\alpha(y+2a)}^{tg\alpha(y+2a)} K\left(-x^2 + 2a^2 + ay\right)dx\,dy = \frac{22}{3}\,tg\,\alpha\cdot a^4 - \frac{27}{2}K\,tg^3\alpha\,a^4 = P$$

τ_{yz}: $0 = \iint_\Omega \tau_{zy}\,d\Omega = 0 \rightarrow$ Se cumple ✓ y $\sigma_z = 0$ ✓

3) $K = \dfrac{2P}{81\cdot a^4\,tg^3\alpha}$ Con $tg\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow P = \dfrac{22}{3\sqrt{3}}a^4 - \dfrac{27a^4K}{6\sqrt{3}}$

Sustituyendo: $\boxed{K = \dfrac{11}{27}}$ $P = \dfrac{11}{2\sqrt{3}}a^4$ $\alpha = 30°$

NOTA: Problema de ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y condiciones de contorno

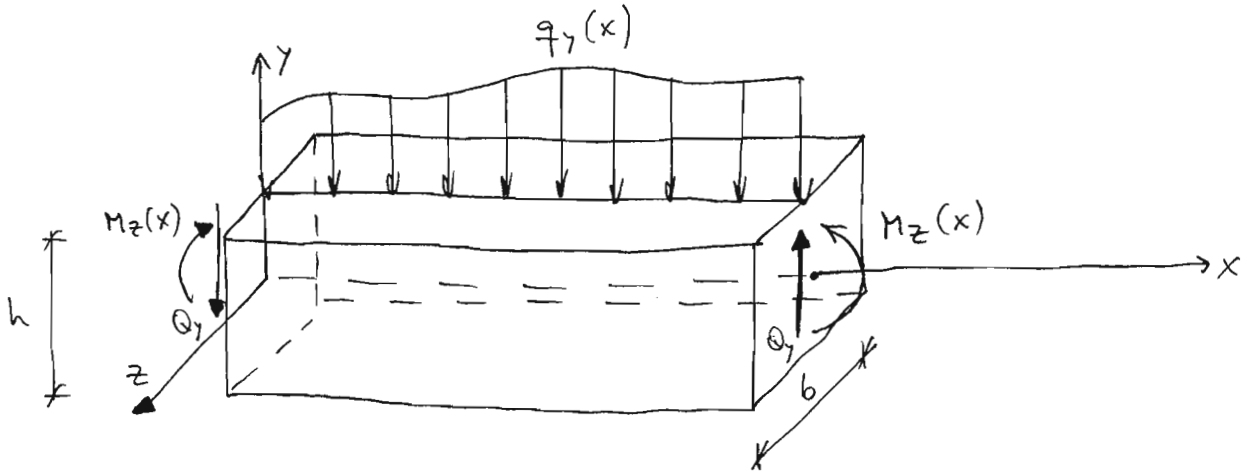
Enunciado (extraído de BREVELAS) Tricar4

Se tiene una viga de sección rectangular $h \times b$, cuyo eje geométrico coincide con el eje x, que soporta una carga repartida variable $q_y(x)$ en el plano xy de simetría de la sección. El momento flector a lo largo de la viga es $M_z(x)$. Se acepta que en cada sección las tensiones σ_x provienen sólo del momento flector y su magnitud es la dada por la Resistencia de Materiales.

$$\sigma_x = -\frac{12\, M_z \cdot y}{b \cdot h^3}$$

Se acepta también que $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ en toda la viga, que $\tau_{yx}\left(y = \pm\frac{h}{2}\right) = 0$ y que $\sigma_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0$. Basándose en las ecuaciones de equilibrio interno de la Elasticidad, se pide:

1) Ley de variación de τ_{xy} y compararla con la obtenida por la Resistencia de Materiales. Tabular los resultados correspondientes a ambas distribuciones en $y = 0, \pm\frac{h}{4}, \pm\frac{h}{2}$.
2) Ley de variación de σ_y e igual comparación que en el caso anterior.



Resolución:

1) Por Resistencia de Materiales:

$$\sigma_x = \frac{-M_z \cdot y}{I} = \frac{-M_z \cdot y}{\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3} = \frac{-12 \cdot M_z \cdot y}{b \cdot h^3}$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \qquad (II)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \qquad (III)$$

Sabemos: $\sigma_z = 0$ $\qquad f_x = 0$

$\tau_{xz} = 0$ $\qquad f_y = 0$ $\qquad$ (ojo, la carga repartida no es una carga por unidad de volumen).

$\tau_{yz} = 0$ $\qquad f_z = 0$

$$\sigma_x = \frac{-12 M_z \cdot y}{b h^3} \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{-12 y}{b \cdot h^3} \frac{\partial M_z}{\partial x} = \frac{12 y}{b \cdot h^3} Q_y(x)$$

ya que: $Q_y(x) = \frac{-\partial M_z}{\partial x}$

Sustituyendo:

$$(I) \quad \frac{12 y}{b h^3} Q_y(x) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{-12 y}{b h^3} Q_y(x)$$

Integrando:

$$\tau_{xy} = -\int \frac{12 y}{b h^3} Q_y(x) dy = \frac{-6 y^2}{b h^3} Q_y(x) + c_1$$

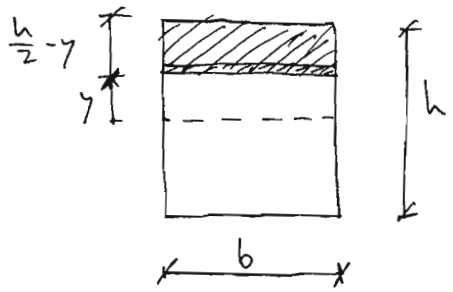
Para obtener c_1 se sabe: $\tau_{xy}\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0$

$$\tau_{xy}\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0 = \frac{-6 \cdot \frac{h^2}{4}}{b \cdot h^3} Q_y(x) + c_1 = \frac{-3 Q_y(x)}{2 b h} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{3 Q_y(x)}{2 b h}$$

$$\tau_{xy} = -Q_y(x) \cdot \left[\frac{6 y^2}{b h^3} - \frac{3}{2 b h}\right] = \frac{-3 Q_y(x)}{2 b h}\left[\frac{4 y^2}{h^2} - 1\right]$$

En Resistencia de Materiales:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_y}{I \cdot b} = \frac{Q_y(x) \cdot \frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)}{\frac{1}{12} b \cdot h^3 \cdot b}$$



$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

$$S_y = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y\right) = \frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)$$

Resolviendo: $\tau_{xy} = \frac{3 Q_y(x)}{2bh}\left[1 - \frac{4y^2}{h^2}\right]$ (Igual que por Elasticidad)

Tabulando:

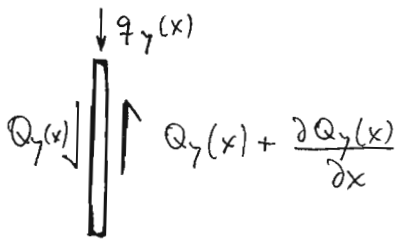
y	τ_{xy}/Q_y
0	$3/(2bh)$
$\pm h/4$	$9/(8bh)$
$\pm h/2$	0

2) Ley de variación de σ_y. (Sustituyendo en II)

$$(II) \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{3}{2bh}\left[1 - \frac{4y^2}{h^2}\right] \frac{\partial Q_y(x)}{\partial x} = \frac{3}{2bh}\left[1 - \frac{4y^2}{h^2}\right] \cdot q_y(x)$$

ya que: $q_y(x) = \frac{\partial Q_y(x)}{\partial x}$



$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{-3\, q_y(x)}{2bh}\left[1 - \frac{4y^2}{h^2}\right]$$

Integrando:

$$\sigma_y = \frac{-3\, q_y(x)}{2bh}\left[y - \frac{4y^3}{3h^2}\right] + C_2$$

Sabemos: $\sigma_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0$. Sustituyendo:

$$\sigma_y\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0 = \frac{-3\, q_y(x)}{2bh}\left[-\frac{h}{2} - \frac{4\left(\frac{-h^3}{8}\right)}{3h^2}\right] + C_2$$

Resolviendo: $C_2 = \frac{-q_y(x)}{2b}$. Por tanto:

$$\sigma_y = \frac{-3\, q_y(x)}{2bh}\left[y - \frac{4y^3}{3h^2} + \frac{h}{3}\right]$$

Tabulando:

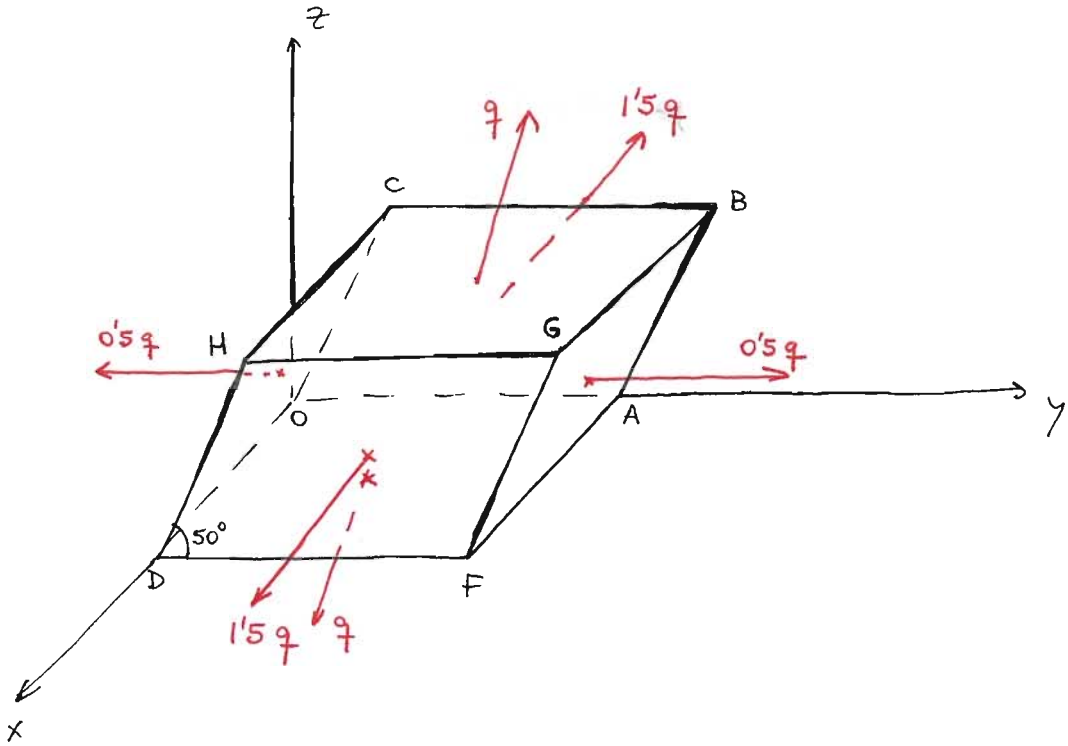
y	σ_y / q_y
$h/2$	$-1/b$
$h/4$	$-27/(32b)$
0	$-1/(2b)$
$-h/4$	$-5/(32b)$
$-h/2$	0

En $\frac{h}{2}$: $\sigma_y = \frac{-q_y}{b}$ (Con lo que se comprueba es correcto)

NOTA: Es un problema de utilización de ecuaciones de equilibrio.

Enunciado (extraído de BREVELAS) Tricar5

El prisma de la figura tiene sus caras opuestas paralelas. El ángulo AOC es $\alpha = 50°$. Sobre las caras OABC y DFGH actúa una tracción uniforme paralela a OD de valor 1'5 q. Sobre las caras ABGF y OCHD actúa una tracción uniforme paralela a OA de intensidad 0'5 q. Por último, sobre las otras dos caras, OAFD y CBGH, actúa una tracción uniforme paralela a OC de magnitud q. Se pide determinar el tensor de tensiones en el interior del prisma. (NOTA q en MPa)



Resolución:

- Sobre la cara DFGH:

$$\bar{n} = (1, 0, 0)$$

$$\bar{t} = (1'5\,q, 0, 0)$$

Aplicando $\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$

$$\begin{pmatrix} 1'5\,q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo : $\left| \begin{array}{l} \sigma_x = 1'5\, q \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{array} \right.$

- Sobre la cara CBGH:

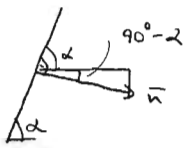
$\bar{n} = (0, 0, 1)$

$\bar{t} = (0,\ q \cdot \cos\alpha,\ q \cdot \operatorname{sen}\alpha)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ q\cos\alpha \\ q\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'5\,q & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo: $\left| \begin{array}{l} \tau_{yz} = q\cos\alpha \\ \sigma_z = q\operatorname{sen}\alpha \end{array} \right.$

- Sobre la cara ABGF:



$\bar{n} = (0, \operatorname{sen}\alpha, -\cos\alpha)$

$\bar{t} = (0,\ 0'5\,q,\ 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0'5q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'5\,q & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & q\cos\alpha \\ 0 & q\cos\alpha & q\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow 0'5\,q = \sigma_y \operatorname{sen}\alpha - q\cos^2\alpha$$

$$\sigma_y = \frac{q(\cos^2\alpha + 0'5)}{\operatorname{sen}\alpha}$$

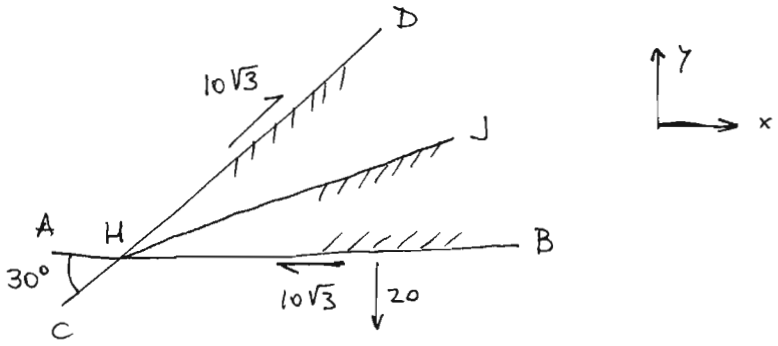
Por tanto, el tensor de tensiones es:

$$\boxed{\underline{T} = \begin{pmatrix} 1'5\,q & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{q(\cos^2\alpha + 0'5)}{\operatorname{sen}\alpha} & q\cos\alpha \\ 0 & q\cos\alpha & q\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}}$$

NOTA: Problema de obtención del tensor de tensiones

Enunciado (extraído de BREVELAS): Tricorb

En un punto de un cuerpo sometido a un estado plano de tensión, se conocen las tensiones sobre los planos AB y CD que se indican en la figura. Se pide determinar el valor y la dirección de la tensión total sobre el plano HJ bisector de los anteriores.



Resolución:

En AB: $\bar{n} = (0, -1)$, $\bar{t} = (-10\sqrt{3}, -20)$

En CD: $\bar{n} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\bar{t} = (15, 5\sqrt{3})$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xy} = 10\sqrt{3} \\ \sigma_y = 20 \end{cases} \quad \text{AB} \\ \begin{pmatrix} 15 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 10\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0'5\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x = 0 \end{cases}$$

El plano HJ tiene $\bar{n} = (-0'259, 0'966)$

Y, por tanto:

$$\boxed{\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 0 & 10\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0'259 \\ 0'966 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16'732 \\ 14'834 \end{pmatrix}}$$

NOTA: Problema de obtención de tensiones totales.

Enunciado: Tricar7

En un punto de un cuerpo sometido a tensión se conocen los valores y signos de las tensiones que, expresados en MPa son:

$$\sigma_x = 3'9 \qquad \sigma_y = -3'9 \qquad \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 5'2 \qquad \tau_{xz} = 39 \qquad \tau_{yz} = 117$$

Se pide:

1) Valores y signos de las tensiones principales.
2) Valores de los cosenos directores de la tensión principal intermedia.
3) Valores de los cosenos directores de las normales a los planos que, siendo paralelos al eje z, la tensión total sobre ellos es tangencial y paralela al plano z=0.
4) Valores exactos de las tensiones definidas en el apartado anterior.

Resolución:

1) El tensor de tensiones, expresado en los ejes xyz es

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 3'9 & 5'2 & 39 \\ 5'2 & -3'9 & 117 \\ 39 & 117 & 0 \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales son:

$$\bar{t} = \sigma \cdot \bar{n} \Rightarrow \underline{T} \cdot \bar{n} = \sigma \cdot \bar{n}$$

$$[\underline{T} - \sigma \underline{I}] \cdot \bar{n} = 0$$

$$|\underline{T} - \sigma \underline{I}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3'9-\sigma & 5'2 & 39 \\ 5'2 & -3'9-\sigma & 117 \\ 39 & 117 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo: (en la HP, introducir la matriz y teclear EGV)

$$\left|\begin{array}{ll} \sigma_I = 123'5 \text{ MPa} & \text{(TRACCIÓN)} \\ \sigma_{II} = 0 \text{ MPa} & \\ \sigma_{III} = -123'5 \text{ MPa} & \text{(COMPRESIÓN)} \end{array}\right.$$

2) Y ahora, para obtener los cosenos directores hay que plantear tres sistemas de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 3'9 & 5'2 & 39 \\ 5'2 & -3'9 & 117 \\ 39 & 117 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^i \\ n_2^i \\ n_3^i \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} n_1^i \\ n_2^i \\ n_3^i \end{bmatrix} \qquad \text{con } i = I, II, III$$

Como estos sistemas son redundantes, en cada uno sólo hay que coger dos ecuaciones y añadir esta tercera:

$$(n_1^i)^2 + (n_2^i)^2 + (n_3^i)^2 = 1$$

$\sigma_I = 123'5$ MPa $\Rightarrow \bar{n}_1 = (0'258913, 0'659052, 0'706127)$

$\sigma_{II} = 0$ MPa $\Rightarrow \bar{n}_2 = (0'9474, -0'3158, -0'0526)$

$\sigma_{III} = -123'5$ MPa $\Rightarrow \bar{n}_3 = (-0'1883, -0'6826, 0'7061)$

- CON LA HP HABRÍA QUE HACER LO SIGUIENTE:

- Introducir la matriz $\begin{pmatrix} 3'9 & 5'2 & 39 \\ 5'2 & -3'9 & 117 \\ 39 & 117 & 0 \end{pmatrix}$

- Teclear [MTH] [MATR] [EGV]

- Sale el vector de autovalores en (1) y los autovectores por columnas en (2)

1: $(0, 123'5, -123'5)$

2: $\begin{pmatrix} 1 & 0'3667 & -0'2667 \\ -0'3333 & 0'9333 & -0'9667 \\ -0'0555 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como no estan normalizados hay que normalizarlos. Por ejemplo, el correspondiente a $\sigma_I = 123'5$.

- Se introduce el autovector $[0'3667, 0'9333, 1]$

  Pulsar [ENTER] dos veces

- Pulsar [MTH] [VECTR] [ABS] y da el módulo del vector

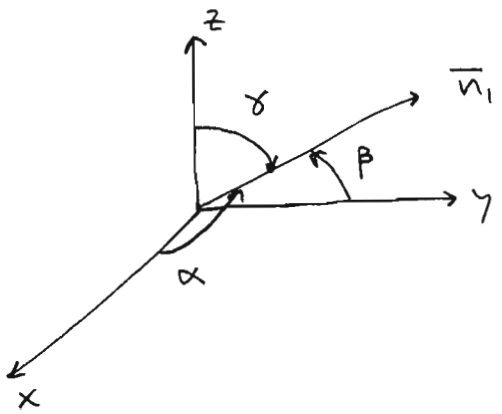
  1: 1'416163

- Pulsar [÷]

  1: $[0'258939, 0'659034, 0'706133]$

Que es el autovector normalizado de σ_I. Se procedería de manera idéntica con σ_{II} y σ_{III}.

Y las componentes de cada autovector son los cosenos directores, ya que el vector es unitario



3) Busco un vector tensión $\bar{t}$ que esté contenido en un plano xy (sin componente z).

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$$

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3'9 & 5'2 & 39 \\ 5'2 & -3'9 & 117 \\ 39 & 117 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$39 \cdot n_x + 117 \cdot n_y = 0 \Rightarrow n_y = \frac{-n_x}{3}$$

Luego el vector que busco es:

$$\bar{n} = n_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalizando: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 0'9487 \\ -0'3162 \\ 0 \end{pmatrix}$

4)

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$$

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3'9 & 5'2 & 39 \\ 5'2 & -3'9 & 117 \\ 39 & 117 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'9487 \\ -0'3162 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2'0555 \\ 6'1664 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} t_x &= 2'056 \text{ MPa} \\ t_y &= 6'166 \text{ MPa} \\ t_z &= 0 \text{ MPa} \end{aligned}}$$

NOTA: Problema de vector tensión, tensor de tensiones y direcciones principales.

Tricar 8.

Las tensiones principales en un punto P de un sólido elástico, referidas a un sistema cartesiano ortogonal OXYZ y expresadas en MPa son:

$$\overline{\sigma_1} = \frac{50}{3} \cdot \left(2 \cdot \overline{i} + 2 \cdot \overline{j} + \overline{k}\right) \qquad \overline{\sigma_2} = 20 \cdot \overline{i} - 10 \cdot \overline{j} - 20 \cdot \overline{k} \qquad \overline{\sigma_3} = -\frac{20}{3} \cdot \left(\overline{i} - 2 \cdot \overline{j} + 2 \cdot \overline{k}\right)$$

Calcular la tensión correspondiente a un plano cuya normal exterior forma ángulos agudos iguales con los semiejes positivos del triedro OXYZ.

Enunciado: Tricar 8

Las tensiones principales en un punto P de un sólido elástico, referidas a un sistema cartesiano ortogonal OXYZ y expresadas en MPa son:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{50}{3}\left(2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}\right)$$

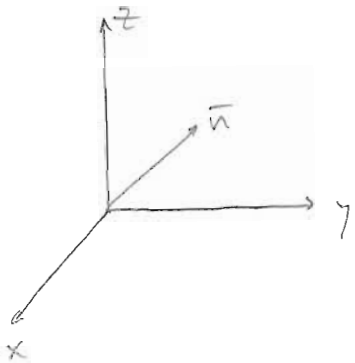
$$\bar{\sigma}_2 = 20\cdot\bar{i} - 10\bar{j} - 20\cdot\bar{k} \qquad \text{siendo } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\bar{\sigma}_3 = -\frac{20}{3}\left(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}\right)$$

Calcular la tensión correspondiente a un plano cuya normal exterior forma ángulos agudos iguales con los semiejes positivos del triedro OXYZ.

Resolución:

La normal al plano que nos piden es:



$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Podremos aplicar Cauchy $\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n}$ una vez que conozcamos el tensor de tensiones $\underline{T}$. En los ejes principales es:

$$\underline{T}' = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix}$$

NOTA: Consideremos ésta la base nueva

Hay que obtener las direcciones de las tensiones principales y normalizarlo

$$\bar{n}_1 = \frac{2}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$$

$$\bar{n}_2 = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$$

$$\bar{n}_3 = -\frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k} \qquad (\text{y se comprueba que } \bar{n}_3 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2)$$

Por tanto:

$$\bar{\sigma}_1 = 50 \cdot \bar{n}_1 \rightarrow \sigma_1 = 50 \text{ MPa}$$
$$\bar{\sigma}_2 = 30 \cdot \bar{n}_2 \rightarrow \sigma_2 = 30 \text{ MPa}$$
$$\bar{\sigma}_3 = 20 \cdot \bar{n}_3 \rightarrow \sigma_3 = 20 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \underline{T}' = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que pasar el tensor de tensiones a la base cartesiana oxyz. La matriz de cambio de base es:

$$G = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Sabemos que: $\underline{T}' = G^T \cdot \underline{T} \cdot G$

Por lo tanto: $G \cdot \underline{T}' \cdot G^T = \underline{T}$ ya que $G^{-1} = G^T$

$$\underline{T} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 340 & 100 & 20 \\ 100 & 310 & 80 \\ 20 & 80 & 250 \end{bmatrix}$$

Por última, la tensión que nos pedían es:

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 340 & 100 & 20 \\ 100 & 310 & 80 \\ 20 & 80 & 250 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 460 \\ 490 \\ 350 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{t} = \begin{bmatrix} 29'509 \\ 31'433 \\ 22'452 \end{bmatrix} (\text{MPa})}$$

y tiene un módulo $|\bar{t}| = 48'61$ MPa

NOTA: Tensiones principales con cambio de base.

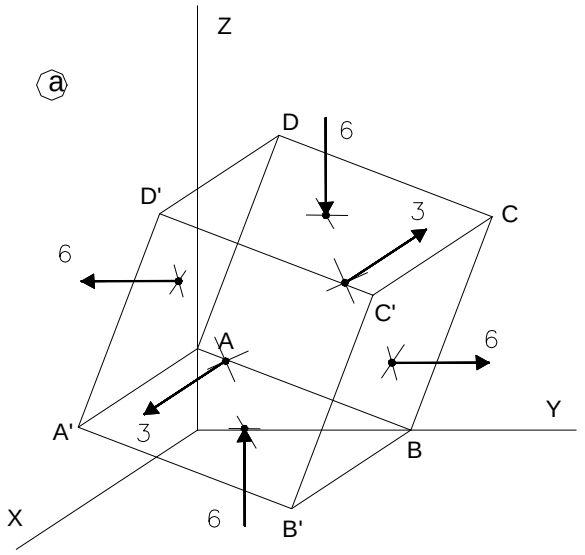
Tricar 9.

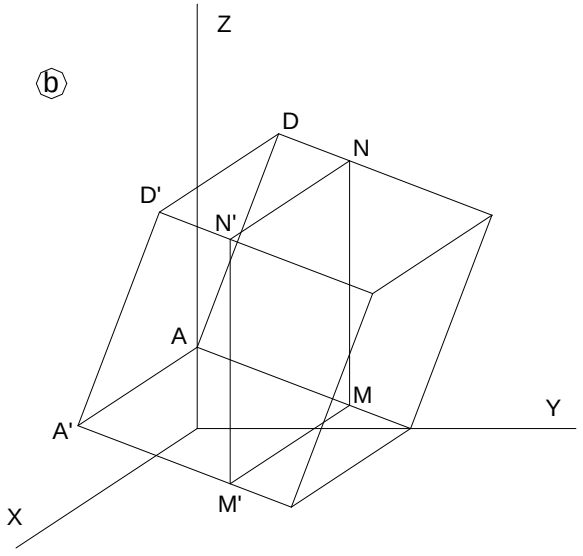
El cubo elemental de la figura a) está orientado de forma que la cara ABCD está en el plano X=0, el vértice A está sobre el eje Z, el B sobre el eje Y, y la distancia OA=AB/2. Las tensiones totales sobre las caras ABCD y A'B'C'D' son paralelas al eje X y su magnitud es de 3 MPa. Las que actúan sobre las caras ADD'A' y BCC'B' son paralelas al eje Y y de magnitud 6 MPa. Por último, las tensiones totales correspondientes a las caras ABB'A' y DCC'D' son paralelas al eje Z y de magnitud 6 MPa. Se pide:

1. Magnitudes, signos y direcciones de las tensiones principales.

2. Si por el centro del paralelepípedo se traza un plano MNN'M' perpendicular al eje Y (figura b), deducir la magnitud, el signo y la dirección de la tensión total sobre dicho plano.

(Examen de febrero de 1994)



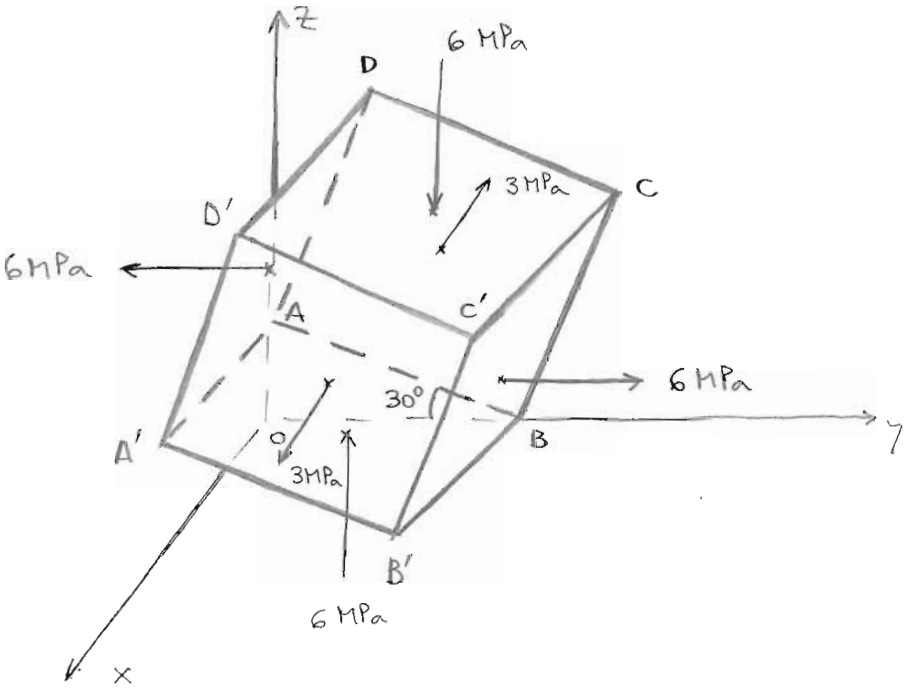


Enunciado: EXAMEN FEBRERO 1994 Tricar 9 (40')

El cubo elemental de la figura está orientado de forma que la cara ABCD está en el plano $x=0$, el vértice A está sobre el eje z, el B sobre el eje y, y $OA = AB/2$. Las tensiones totales sobre las caras ABCD y A'B'C'D' son paralelas al eje x y su magnitud es de 3 MPa. Las que actúan sobre las caras ADD'A' y BCC'B' son paralelas al eje y y de magnitud 6 MPa. Por último, las tensiones totales correspondientes a las caras ABB'A' y DCC'D' son paralelas al eje z y de magnitud 6 MPa.

Se pide:

1) Magnitudes y signos de las tensiones principales.
2) Si por el centro del cubo se traza un plano MNN'M' perpendicular al eje y, deducir la magnitud, el signo y la dirección de la tensión total sobre dicho plano.



Resolución:

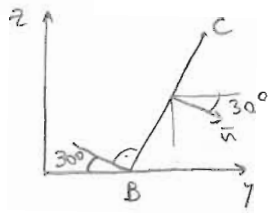
1) • CARA A'B'C'D':

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando $\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_x = 3 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 0 \text{ MPa} \\ \tau_{xz} = 0 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

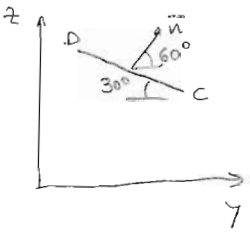
- CARA BCC'B':



$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 30° \\ -\operatorname{sen} 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{ll} 0 = 0 & \\ 6 = \sigma_y \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \tau_{yz} & (\mathrm{I}) \\ 0 = \tau_{yz} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \sigma_z & (\mathrm{II}) \end{array} \right.$$

- CARA DCC'D':



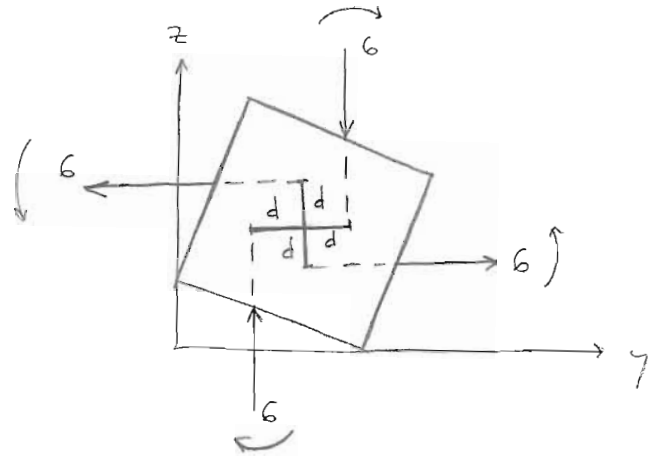
$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 60° \\ \operatorname{sen} 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \qquad \bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{ll} 0 = 0 & \\ 0 = \sigma_y \frac{1}{2} + \tau_{yz} \frac{\sqrt{3}}{2} & (\mathrm{III}) \\ -6 = \tau_{yz} \cdot \frac{1}{2} + \sigma_z \frac{\sqrt{3}}{2} & (\mathrm{IV}) \end{array} \right.$$

Cogiendo las ecuaciones (I), (II) y (III) y resolviendo el sistema, se tiene:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_y = 3\sqrt{3} \text{ MPa} \\ \tau_{yz} = -3 \text{ MPa} \\ \sigma_z = -3\sqrt{3} \text{ MPa} \end{array} \right.$$

ojo: La ecuación (IV) se cumple. Esto quiere decir que las tensiones en DCC'D' y ABB'A deben ser de compresión para establecer el equilibrio de momentos.



Por tanto, el tensor de tensiones es:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & -3 \\ 0 & -3 & -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales son:

$$\begin{cases} \sigma_I = 6 \text{ MPa} \rightarrow \langle 0,\ 0'966,\ -0'259 \rangle^T \\ \sigma_{II} = 3 \text{ MPa} \rightarrow \langle 1, 0, 0 \rangle^T \\ \sigma_{III} = -6 \text{ MPa} \rightarrow \langle 0,\ 0'259,\ 0'966 \rangle^T \end{cases}$$

2)

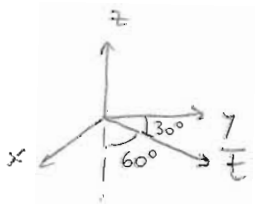
$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & -3 \\ 0 & -3 & -3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$|\bar{t}| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 6 \text{ MPa}$$

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Forma 30° con "y" y 60° con "z"



NOTA: Obtención de tensiones y direcciones principales

Tricar 10.

El sólido elástico constituido por el tetraedro de vértices O (0, 0, 0), A (140, 0, 0), B (0, 140, 0) y C (0, 0, 140) (coordenadas en metros) se encuentra sometido al siguiente estado de deformaciones:

$\varepsilon_x = 2 \cdot x \cdot 10^{-6}$ $\varepsilon_y = 2 \cdot y \cdot 10^{-6}$ $\varepsilon_z = 2 \cdot z \cdot 10^{-6}$

$\gamma_{xy} = 2 \cdot 10^{-6}$ $\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$

Se pide:

1. Demostrar que dicho estado de deformaciones es físicamente posible.
2. Desplazamiento relativo que se produce según la dirección AC, entre los puntos A y C.
3. Calcular la variación del ángulo formado por las aristas OA y OB.
4. Calcular la variación angular máxima que se produce en el punto de coordenadas P (30, 30, 30).

(Examen de febrero de 1996)

Enunciado: **EXAMEN FEBRERO 1996** Tricar 10 (30')

El sólido elástico constituido por el tetraedro de vértices O (0,0,0), A (140,0,0), B (0,140,0) y C (0,0,140) (coordenadas en metros se encuentra sometido al siguiente estado de deformaciones:

$$\varepsilon_x = 2x \cdot 10^{-6} \qquad \gamma_{xy} = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 2y \cdot 10^{-6} \qquad \gamma_{xz} = 0$$

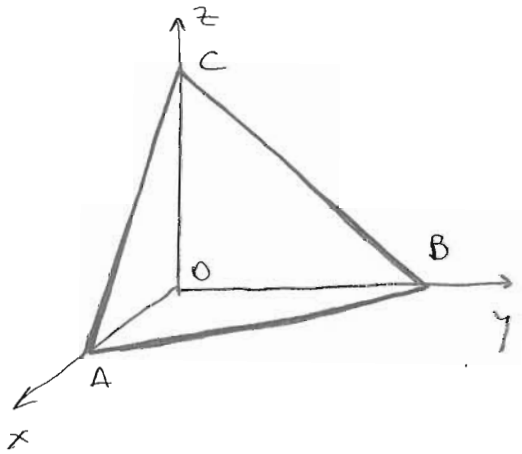
$$\varepsilon_z = 2z \cdot 10^{-6} \qquad \gamma_{yz} = 0$$

Se pide:

1) Demostrar que dicho estado de deformaciones es físicamente posible.
2) Desplazamiento relativo que se produce según la dirección AC, entre los puntos A y C.
3) Calcular la variación del ángulo formado por las aristas OA y OB.
4) Calcular la variación angular máxima que se produce en el punto de coordenadas P(30, 30, 30).

Resolución:

1)



$$\underline{D} = 2 \cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} x & 0'5 & 0 \\ 0'5 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Para ver si es físicamente posible, hay que ver si cumple las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones y si es simplemente conexo (sin agujeros). Esto último lo cumple.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

En las otras cinco ecuaciones salen identidades $0=0$. Por lo tanto, el estado de deformaciones es físicamente posible.

2) Desplazamiento relativo entre A y C.

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \bar{\varepsilon}_{AC} = \underline{D} \cdot \bar{n}_{AC} = 2 \cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} x & 0'5 & 0 \\ 0'5 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -x \\ -0'5 \\ z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{AC} = \bar{n}_{AC}^T \cdot \bar{\varepsilon}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1) \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -x \\ -0'5 \\ z \end{bmatrix} = 10^{-6} (x + z)$$

La ecuación de la recta AC es: $x + z = 140$ Por lo tanto

$$\varepsilon_{AC} = 1'4 \cdot 10^{-4}$$

$$\boxed{\Delta l_{AC}} = \int_A^C \varepsilon_{AC} \, dl_{AC} = \varepsilon_{AC} \int_A^C dl_{AC} = 1'4 \cdot 10^{-4} \cdot l_{AC} = 1'4 \cdot 10^{-4} \cdot 140\sqrt{2} = \underline{2'772 \cdot 10^{-2} \, m}$$

3) Variación del ángulo $\widehat{AOB}$.

$$\boxed{\gamma_{xy}(0,0,0) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}}$$

4) Variación angular máxima en $P(30, 30, 30)$.

$$\gamma_{MAX} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III} \qquad \underline{D}^P = \begin{pmatrix} 6 \cdot 10^{-5} & 10^{-6} & 0 \\ 10^{-6} & 6 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Las deformaciones principales son:

$$\varepsilon_I = 6'1 \cdot 10^{-5}$$
$$\varepsilon_{II} = 6 \cdot 10^{-5}$$
$$\varepsilon_{III} = 5'9 \cdot 10^{-5}$$

$$\boxed{\gamma_{MAX} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}}$$

NOTA: Problema de aplicación del tensor de deformaciones

Enunciado: **EXAMEN DE JUNIO DE 1999** (30') Tricarll

Para un sólido, el campo de tensiones viene dado por:

$$\sigma_x = 2xy \qquad \sigma_y = 2x^2 \qquad \sigma_z = 0'5 \cdot x(x+y)$$

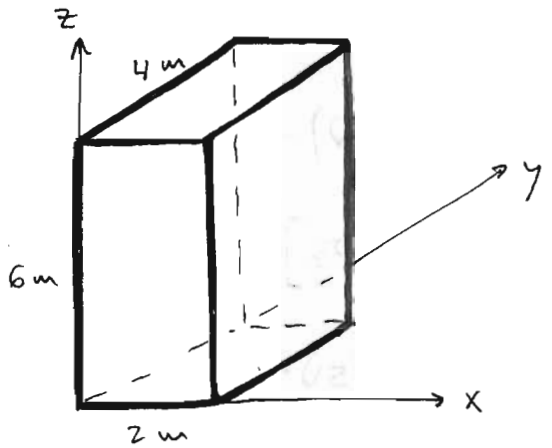
$$\tau_{xy} = -y^2 \qquad \tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0$$

Se supone que, en el origen de coordenadas, los movimientos y giros son nulos, y que no actúan fuerzas de masa ni temperaturas. Se pide:

1) ¿Puede ser solución de tensiones en algún problema elástico? En caso afirmativo, ¿bajo qué condiciones?
2) Comprobar si dicho campo de tensiones puede ser solución de un problema de tensión plana, de deformación plana, o de ambos.
3) A partir del campo de tensiones dado, determinar las componentes del campo de desplazamientos según las direcciones x, z.

Si el sólido en cuestión es el prisma recto indicado en la figura, se pide:

4) Determinar el valor de la componente z de la fuerza exterior que se encuentra aplicada en la cara z=6
5) Determinar el valor de la presión exterior aplicada sobre la cara x=2.



Resolución:

1) Para que este campo de tensiones sea solución de algún problema elástico se han de cumplir:

A) ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO.
B) ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES.
C) CONDICIONES DE CONTORNO.

A)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (II)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \qquad (III)$$

(I) $2y - 2y + 0 = 0$ SE CUMPLE

(II) $0 + 0 + 0 = 0$ SE CUMPLE

(III) $0 + 0 + 0 = 0$ SE CUMPLE

B)

$$(I) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Hay que aplicar la ley de Hooke para obtener las deformaciones en función de las tensiones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right] = \frac{1}{E}\left[2xy - \nu \cdot 2x^2 - \nu \cdot 0'5 \cdot x(x+y)\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[xy(2 - 0'5\nu) - 2'5\,\nu \cdot x^2\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[-\nu \cdot \sigma_x + \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z\right] = \frac{1}{E}\left[-2xy \cdot \nu + 2x^2 - \nu \cdot 0'5 \cdot x(x+y)\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[-2'5\nu \cdot x \cdot y + x^2(2 - 0'5\nu)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[-\nu\cdot\sigma_x - \nu\cdot\sigma_y + \sigma_z\right] = \frac{1}{E}\left[-2xy\cdot\nu - 2x^2\cdot\nu + 0'5x\,(x+y)\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\cdot\left[x\cdot y\,(-2\nu + 0'5) + x^2\,(-2\nu + 0'5)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-y^2}{G}$$

Sustituyendo:

$$(I) \quad 0 + \frac{1}{E}\cdot 2\cdot(2 - 0'5\,\nu) = 0 \qquad \text{NO SE CUMPLE}$$

Luego, este campo de tensiones no es solución de un problema elástico.

2) No, ya que no es un problema elástico.

3) No, por la misma razón.

4) Componente de la fuerza aplicada en $z=6$, en la dirección z.

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n}$$

$$\sigma_z(z=6) = 0'5\,x\,(x+y)$$

$$\tau_{xz}(z=6) = 0$$

$$dF_z = \sigma_z\cdot d\Omega$$

$$F_z = \int_0^2\int_0^4 0'5\cdot x\cdot(x+y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(0'5\,x^2 y + 0'25\,x y^2 + c_1\right)\Big|_0^4 dx =$$

$$= \int_0^2 (2x^2 + 4x)\,dx = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + c_2\Big|_0^2 = \frac{16}{3} + 8 = 13'333$$

5) Presión exterior aplicada en $X=2$.

$$\sigma_x (x=2) = 2xy = 4y$$

NOTA: Problema donde con el campo de tensiones se obtiene todo lo demás.

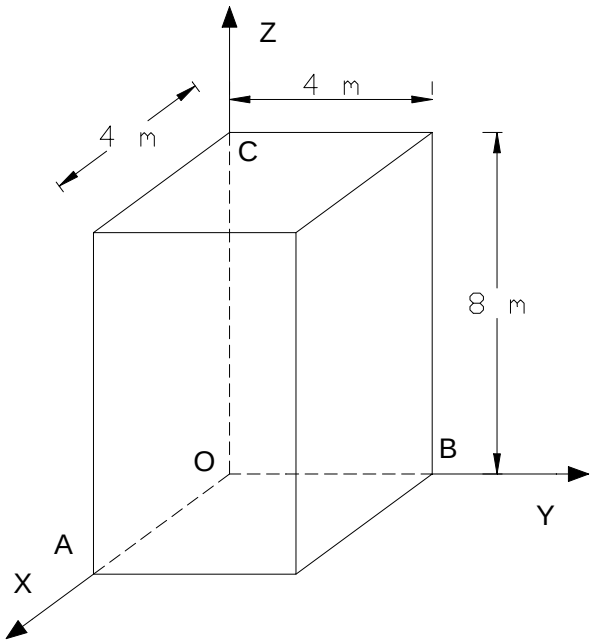
Tricar 12.

Las aristas OA y OB del prisma de la figura miden 4 metros, y OC mide 8 metros. Como consecuencia de las cargas que actúan únicamente en el contorno se producen las siguientes tensiones:

$$\sigma_x = a\cdot x^2 - 2\cdot y^2 - 2\cdot y \; ; \quad \sigma_y = b\cdot x^2 + c\cdot y^2 + 10\cdot x \; ; \quad \sigma_z = z + d \; ; \quad \tau_{xy} = g\cdot x\cdot y \; ; \quad \tau_{xz} = 0 \; ; \quad \tau_{yz} = -4\cdot x + k\cdot y + 5$$

Sabiendo que la tensión total en cualquier punto de la cara superior del prisma es tangencial y que el coeficiente de Poisson vale $\nu = 0.20$ se pide:

1. Valores de los parámetros a, b, c, d, g, k.
2. Magnitud y dirección de las tensiones principales en el punto D (1, 1, 2).
3. Valor exacto de la tensión total en D sobre el plano normal a la recta OD.
4. Valor exacto de la tensión normal en D sobre el plano anterior, indicando si es de tracción o de compresión.



Enunciado Tricar12

Las aristas OA y OB del prisma de la figura miden 4 m, y OC mide 8 m. Como consecuencia de las cargas que actúan únicamente en el contorno, se producen las siguientes tensiones:

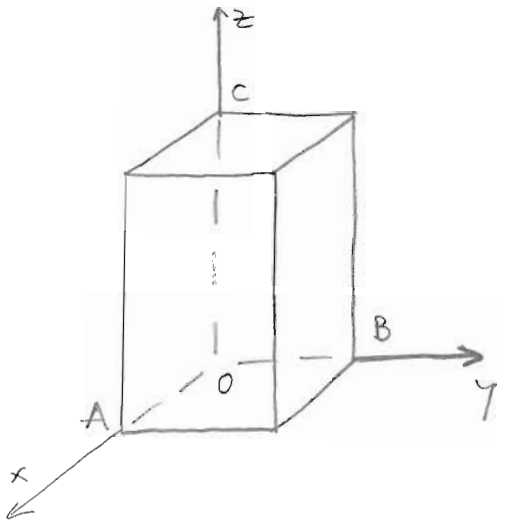
$$\sigma_x = ax^2 - 2y^2 - 2y \qquad \tau_{xy} = g\,x\,y$$

$$\sigma_y = bx^2 + cy^2 + 10x \qquad \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_z = z + d \qquad \tau_{yz} = -4x + Ky + 5$$

Sabiendo que la tensión total en cualquier punto de la cara superior del prisma es tangencial, y que D=ó20, se pide:

1) Valores de los parámetros a, b, c, d, g, K.
2) Magnitud y dirección de las tensiones principales en el punto D(1,1,2).
3) Valor exacto de la tensión total en D sobre el plano normal a la recta OD.
4) Valor exacto de la tensión normal en D sobre el plano anterior, indicando si es de tracción o de compresión



Resolución: No hay fuerzas másicas según dice el enunciado.

1) Lo primero que se suele aplicar son las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \cancel{f_x}^{\,0} = 0 \rightarrow 2ax + gx = 0 \rightarrow g = -2a \; (I$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \cancel{f_y}^{\,0} = 0 \rightarrow g \cdot y + 2cy = 0 \rightarrow c = \frac{-g}{2} = a \quad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \cancel{f_z}^{\,0} = 0 \rightarrow K + 1 = 0 \rightarrow \boxed{K = -1}$$

Ahora hay que obtener las deformaciones y posteriormente aplicar las condiciones de compatibilidad.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} x^2(a - 0'2b) + y^2(-2 - 0'2a) - 2x - 2y - 0'2z - 0'2d \\ x^2(-0'2a + b) + y^2(0'4 + a) + 10x + 0'4y - 0'2d - 0'2z \\ x^2(-0'2a - 0'2b) + y^2(0'4 - 0'2a) - 2x + 0'4y + z + d \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2'4} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = \dfrac{-4'8\, a\, xy}{E} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} = 0 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} = \dfrac{-9'6\, x - 2'4\, y + 12}{E} \end{array} \right.$$

Aplicando las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \rightarrow b = 2 - 2a \quad (\mathrm{III})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \rightarrow \boxed{a = 2} \rightarrow \boxed{g = -4} \quad \boxed{c = 2} \quad \boxed{b = -2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \rightarrow a = -b \quad \checkmark$$

Con el resto de ecuaciones de compatibilidad salen identidades del tipo $0=0$. Por tanto, para obtener la condición que falta (d) es necesario utilizar las condiciones de contorno

• CARA SUPERIOR: $\sigma_z = 0 \rightarrow 8+d=0 \rightarrow \boxed{d=-8}$

Entonces, el tensor de tensiones es:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 2x^2-2y^2-2y & -4xy & 0 \\ -4xy & -2x^2+2y^2+10x & -4x-y+5 \\ 0 & -4x-y+5 & z-8 \end{pmatrix}$$

2) Tensiones principales en $D(1,1,2)$.

$$\underline{T}_D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

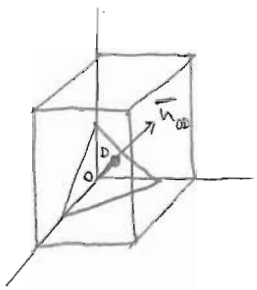
Obteniendo autovalores y autoversores se tiene.

$$\sigma_I = 11'211 \rightarrow d_1 = \begin{pmatrix} -0'29 \\ 0'957 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -3'211 \rightarrow d_2 = \begin{pmatrix} 0'957 \\ 0'29 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{III} = -6 \rightarrow d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Tensión total en D sobre el plano normal a OD



$$\bar{n}_{OD}^T = \frac{D-O}{|D-O|} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Aplicando Cauchy: $\bar{t} = \underline{T}_D \cdot \bar{n}_{OD} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$

4) Tensión normal en D sobre el plano anterior

$$\boxed{\sigma = \bar{n}_{OD}^{T} \cdot \bar{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \end{pmatrix} = -4} \quad \text{(COMPRESIÓN)}$$

NOTA: A partir de las tensiones se saca todo lo demás.

Enunciado: (60') Tricar 13

La viga de sección circular de la figura tiene radio R metros, está empotrada en $z=0$ y libre en $z=L$. La sección libre se encuentra sometida a una distribución de cargas cuya resultante es una fuerza puntual de intensidad P (KN) aplicada en el centro de la sección y dirigida según el sentido positivo del eje Ox. No existe otras acciones superficiales o másicas actuando sobre la viga. El material de ésta tiene $E = 2 \cdot 10^{-4}$ MPa y $\nu = 0'1$. Se pide:

1) Comprobar si el siguiente campo de tensiones es solución elástica exacta del problema anterior. Se indicarán las ecuaciones de la elasticidad que se satisfacen y las que no se cumplen.

$$\sigma_x = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{xz} = A\left(R^2 - x^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu}\, y^2\right)$$

$$\sigma_z = -\frac{P(L-z)}{I} \cdot x \qquad \tau_{yz} = B\, x\, y$$

con $I = \dfrac{\pi R^4}{4}$

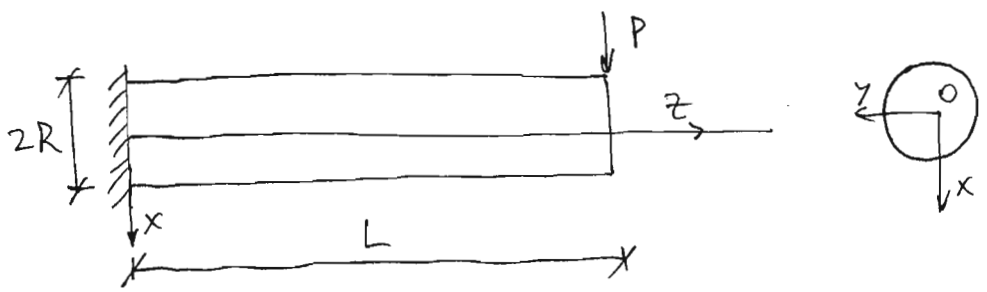
2) Valores de las constantes A y B de la solución exacta o más aproximada a la exacta.

3) Desplazamiento horizontal en la dirección OZ del punto $(-R, 0, L)$ en mm.

4) Solución en tensiones de la Resistencia de Materiales.

5) Comparar y comentar las diferencias entre la solución de la Resistencia de Materiales y la elástica anterior.

$(P = 100\,KN,\ R = 2\,m,\ L = 9\,m)$



Resolución:

1) Para ser solución elástica del problema, debe cumplirse:

* ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO.
* ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES.
* RELACIONES CONSTITUTIVAS.
* CONDICIONES DE CONTORNO.

• Ecuaciones de equilibrio interno:

$$(I)\quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \checkmark$$

$$(II)\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \checkmark$$

$$(III)\quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \Rightarrow -2xA + Bx + \frac{Px}{I} = 0 \Rightarrow \boxed{B = 2A - \frac{P}{I}}$$

• Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones y rel. constitutiv

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \frac{P \cdot \nu (L-z)}{I} \cdot x \\ \frac{P \nu (L-z)}{I} \cdot x \\ -\frac{P(L-z)}{I} \cdot x \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2'2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2'2\,\tau_{xy}}{E} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{2'2\,\tau_{xz}}{E} = \frac{2'2A}{E}\left(R^2 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2'2\,\tau_{yz}}{E} = \frac{2'2\,B\,xy}{E}$$

(IV) $$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Rightarrow \quad 0+0=0 \quad \checkmark$$

(V) $$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \Rightarrow \quad 0+0=0 \quad \checkmark$$

(VI) $$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \Rightarrow \quad 0+0=0 \quad \checkmark$$

$(A \equiv cte)$

(VII) $$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2 \cdot 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2'2\,By}{E} - \frac{Ay}{E}\right) \Rightarrow \quad 0=0 \quad \checkmark$$

(VIII) $$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{-2 \cdot 0'1 \cdot P}{E \cdot I} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2'2\,By}{E} + \frac{1'1 \cdot Ay}{E}\right) = \frac{2'2B + A \cdot 1'1}{E}$$

$$-\frac{0'2\,P}{I} = 2'2B + A \cdot 1'1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{-0'2\,P}{1'1 \cdot I} - 2\,B} \quad (II)$$

(IX) $$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2'2\,By}{E} - \frac{Ay}{E}\right) = 0 \quad \checkmark$$

Hay dos incógnitas A y B:

Por tanto, se cumplen todas las ecuaciones de equilibrio interno y compatibilidad de deformaciones, con las constantes A y B indicadas. Habría que comprobar las condiciones de contorno.

$$A = 0'463 \frac{P}{R^4}$$

$$B = -0'3472 \frac{P}{R^4}$$

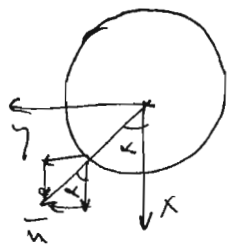
En la superficie lateral, la tensión es nula.

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$$

Hay que particularizar el tensor de tensiones en el contorno lateral.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3y^2A}{4} \\ 0 & 0 & B\sqrt{R^2-y^2}\cdot y \\ \frac{3y^2A}{4} & By\sqrt{R^2-y^2} & -\frac{P}{I}(L-z)\cdot\sqrt{R^2-y^2} \end{pmatrix}$$



$$\cos\alpha = \frac{x}{R}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{R}$$

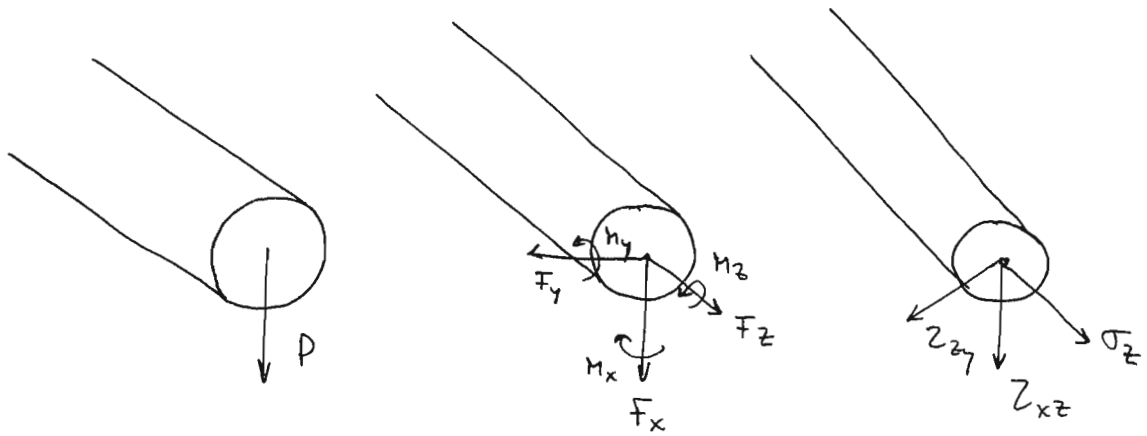
$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/R \\ y/R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{R^2-y^2}/R \\ y/R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3y^2A}{4} \\ 0 & 0 & B\sqrt{R^2-y^2}\cdot y \\ \frac{3y^2A}{4} & By\sqrt{R^2-y^2} & -\frac{P}{I}(L-z)\sqrt{R^2-y^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \sqrt{R^2-y^2}/R \\ y/R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando, se obtiene:

$$B = \frac{-3A}{4} \qquad \text{se cumple}$$

En el contorno $z=L$



Las condiciones de contorno son:

$$\left| \begin{array}{ll} F_x = P & M_x = 0 \\ F_y = 0 & M_y = 0 \\ F_z = 0 & \end{array} \right.$$

$$dF_y = \tau_{yz} \cdot d\Omega$$

$$F_y = 0 = \int \tau_{yz}\, d\Omega = \iint B \cdot x \cdot y \; d\Omega = B \overbrace{\iint x \cdot y \; d\Omega}^{\text{Prod. inercia resp. ejes ppales}} = 0 \quad \checkmark$$

$$F_z = \iint_\Omega \sigma_z \cdot d\Omega = \iint_\Omega \frac{-P(L-z)}{I} \times d\Omega = 0 \quad \checkmark \quad \text{ya que } z=L$$

$$M_x = \iint_\Omega \sigma_z \cdot y \cdot d\Omega = 0 \quad \checkmark \quad \text{ya que } z=L$$

$$M_y = \iint_\Omega \sigma_z \cdot x \cdot d\Omega = 0 \quad \checkmark \quad \text{ya que } z=L$$

$$F_x = P = \iint_\Omega \tau_{xz}\, d\Omega = \iint_\Omega A\left(R^2 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) d\Omega =$$

$$= AR^2 \underbrace{\iint_\Omega d\Omega}_{\text{Área} = \pi R^2} - A \underbrace{\iint x^2 d\Omega}_{\text{M. inerc.} = \frac{\pi R^4}{4}} - \frac{A}{4} \underbrace{\iint y^2 d\Omega}_{\text{M. inerc.} = \frac{\pi R^4}{4}} = A \cdot \pi \cdot R^4 - A \cdot \pi \cdot \frac{R^4}{4} - A \cdot \pi \frac{R^4}{16}$$

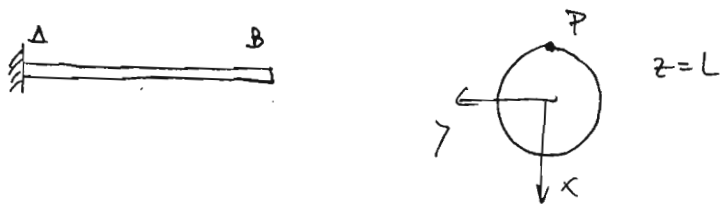
Por tanto: $P = \dfrac{11\pi A R^4}{16} \Rightarrow A = \dfrac{16P}{11\cdot\pi R^4} = 0'463\dfrac{P}{R^4}$ ✓

Se cumplen todas las ecuaciones de contorno. El problema está bien planteado

2) $\boxed{A = \dfrac{3+2\nu}{8(1+\nu)}\dfrac{P}{I}}$ $\boxed{B = \dfrac{-(1+2\nu)}{4(1+\nu)}\dfrac{P}{I}}$

$A = 0'463\dfrac{P}{R^4}$ $B = -0'3472\dfrac{P}{R^4}$

3) Desplazamiento horizontal en $(-R, 0, L)$ en mm.



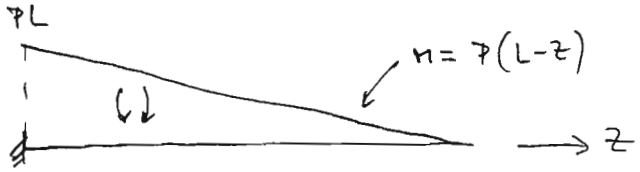
$$\Delta l_{AB} = \int_A^B \varepsilon_{AB}\cdot dl_{AB} = \int_0^L \varepsilon_z\cdot dl = \frac{-1}{E}\int_0^L \frac{P(L-z)}{I}\,x\,dz =$$

$$= \frac{-P}{EI}\int_0^L (Lx - xz)\,dz = \frac{-P}{EI}\left(Lxz - \frac{xz^2}{2}\right)\Big|_0^L =$$

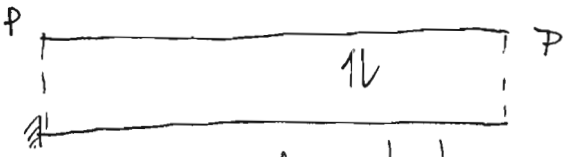
$$= \frac{-P}{EI}\left(L^2x - \frac{xL^2}{2}\right) = \frac{-PL^2x}{2EI} \xrightarrow[x=-R]{} \boxed{\Delta l_{AB} = \frac{PL^2R}{2EI}}$$

4 y 5)

Cargas



Ley de Mf



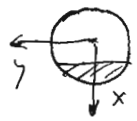
Ley de cortantes

$$\sigma_z = \frac{-M_y \cdot x}{I} = \frac{-P(L-z)\cdot x}{I} \quad \Rightarrow \text{IGUAL QUE EN ELASTICIDAD}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$$

$$Q = P$$

$$S = \iint_{\Omega} x \cdot d\Omega = \frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}$$



$$b(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{1}{3}\left(R^2 - x^2\right)\frac{P}{I} \quad \Rightarrow \text{NO ES IGUAL QUE EN ELASTICIDAD}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \text{en Resistencia} \\ \quad\;\; = Bxy \Rightarrow \text{en Elasticidad} \end{array}\right| \Rightarrow \text{NO ES IGUAL}$$

Además, en Resistencia de Materiales no se cumple la condición de contorno lateral $\bar{t}|_{\Gamma} = 0$, porque en la fórmula de Resistencia de Materiales se calcula la media.

Podría haberse hecho esta comparación viendo el tensor de tensiones en Elasticidad, y el de Resistencia de Materiales.

NOTA: Problema de ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y de contorno.

Enunciado (extraído de BREVELAS): Tricar14

Dado el siguiente estado tensional en un sólido:

$$\begin{cases} \sigma_x = y^2 - x^2 \\ \sigma_y = x^2 - y^2 \\ \tau_{xy} = 2xy \end{cases}$$

Se pide: 1) Coordenadas de los puntos singulares si los hubiere.

2) Ecuaciones de las isostáticas rectas.

3) Ecuaciones de las dos familias de isostáticas.

Resolución:

1) En los puntos singulares las dos tensiones principales son iguales, y no hay tensiones tangenciales.

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{y^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - y^2}{2} = 0$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{y^2 - x^2 - x^2 + y^2}{2} = y^2 - x^2$$

$$\sigma_I = \sqrt{y^4 + x^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{y^4 + x^4 + 2x^2y^2} = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2 + y^2$$

$$\sigma_{II} = -(x^2 + y^2)$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 = -x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

Además: $2xy = 0$

El único punto que cumple es $(0,0)$

2) Ecuaciones de las isostáticas rectas.

4/3) Las ecuaciones de las isostáticas son:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{1+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2}$$

$$\sigma_x-\sigma_y = 2y^2-2x^2$$

$$\tau_{xy} = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{2xy} \pm \sqrt{1+\left(\frac{2y^2-2x^2}{4xy}\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{2xy} \pm \sqrt{\frac{16x^2y^2+4y^4+4x^4-8x^2y^2}{16x^2y^2}} =$$

$$= \frac{x^2-y^2}{2xy} \pm \sqrt{\left(\frac{2x^2+2y^2}{4xy}\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{4xy} \pm \frac{2x^2+2y^2}{4xy}$$

Las dos familias son:

① $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2}{4xy} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy - x\,dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\,d(y^2-x^2)=0 \Rightarrow \boxed{y^2-x^2=cte}$

② $\frac{dy}{dx} = \frac{-4y^2}{4xy} = \frac{-y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow d(\ln y + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln(y)+\ln(x) = cte$

$\boxed{x\cdot y = cte}$

Son dos familias de hipérbolas ortogonales entre sí.

Para que estas ecuaciones representen rectas; las constantes deben ser cero

$y^2=x^2 \Rightarrow \boxed{y = \pm x}$

$x\cdot y = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ $\boxed{y=0}$

Ejes coordenados y sus bisectrices

NOTA: Problema de obtención de puntos singulares y ecuaciones de isostáticas.

Tricar 15.

El tensor de tensiones en un punto genérico (x,y,z) de un sólido elástico es:

$$T=\begin{bmatrix} 4\cdot x + 3\cdot y & -6\cdot(x + y + z) & y + z \\ -6\cdot(x + y + z) & 10\cdot(y - z) & 3\cdot x \\ y + z & 3\cdot x & 5\cdot z \end{bmatrix}$$

Las coordenadas vienen expresadas en metros. Se pide:

1. Calcular las fuerzas de volumen que actúan en el sólido.
2. Valor de la tensión normal octaédrica en el punto P (0, 1, -1).
3. Valor de la tensión tangencial octaédrica en el punto P (0, 1, -1).
4. En el mismo punto P y asociado al plano perpendicular a la recta PB, siendo B (0, 3, 1), obtener la tensión total en P y la componente normal, σ_n, sobre la recta PB.
5. Obtener la posición del punto M sobre la recta PB, tal que PM = $1/(\sqrt{|\sigma_n|})$.**n**, siendo **n** el versor normal al plano.
6. Obtener el lugar geométrico del punto M cuando varía el plano que pasa por P.

Enunciado: Tricar 15 (30')

El tensor de tensiones en un punto genérico (x, y, z) de un sólido elástico es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 4x+3y & -6(x+y+z) & y+z \\ -6(x+y+z) & 10(y-z) & 3x \\ y+z & 3x & 5z \end{bmatrix}$$

Las coordenadas vienen expresadas en metros. Se pide:

1) Calcular las fuerzas de volumen que actúan en el sólido.
2) Valor de la tensión normal octaédrica en el punto $P(0,1,-1)$
3) Valor de la tensión tangencial octaédrica en el punto $P(0,1,-1)$.
4) En el mismo punto P y asociado al plano perpendicular a la recta PB, siendo $B(0,3,1)$, obtener la tensión total en P y la componente normal, σ_n, sobre la recta PB.
5) Obtener la posición del punto M sobre la recta PB, tal que $\overline{PM} = 1/(\sqrt{|\sigma_n|}) \cdot \overline{n}$; siendo $\overline{n}$ el versor normal al plano.
6) Obtener el lugar geométrico del punto M cuando varía el plano que pasa por P.

Resolución:

1) Aplicando las ecuaciones de equilibrio interno.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \rightarrow 4 - 6 + 1 + f_x = 0 \rightarrow \boxed{f_x = 1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \rightarrow -6 + 10 + 0 + f_y = 0 \rightarrow \boxed{f_y = -4}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \rightarrow 0 + 0 + 5 + f_z = 0 \rightarrow \boxed{f_z = -5}$$

2) Tensión normal octaédrica en $P(0,1,-1)$

Sustituyendo en el tensor de tensiones:

$$\underline{T}^P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales en P son:

$$\sigma_1 = 20$$
$$\sigma_2 = 3$$
$$\sigma_3 = -5$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\sigma_{OCT}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \boxed{6}$$

3)

$$\boxed{\tau_{OCT}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2} = \boxed{10'42}$$

4)

$P(0,1,-1)$
$B(0,3,1)$

$$\overline{PB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{n} = \frac{\overline{PB}}{|\overline{PB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ -5 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad |\bar{t}| = 14'58$$

La proyección sobre $\bar{n}$ será:

$$\boxed{\sigma_n} = \bar{n}^T\cdot\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{7'5}$$ (Al ser ⊕ es tracción)

5)

$$\overline{PM} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}}\cdot\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{7'5}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ con origen en P

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1'258 \\ -0'742 \end{pmatrix}$$

Luego las coordenadas de $\boxed{M(0, 1'258, -0'742)}$

6) Lugar geométrico de **M**. Habrá que proceder de forma genera.

$$\overline{PM} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}} \cdot \overline{n}$$

$$\overline{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$ vector unitario director de cada plano

$$\overline{t} = \underline{T} \cdot \overline{n} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 20b \\ -5c \end{pmatrix}$$

$$\sigma_n = \overline{n}^T \cdot \overline{t} = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} 3a \\ 20b \\ -5c \end{pmatrix} = 3a^2 + 20b^2 - 5c^2$$

$$\overline{PM} = \frac{1}{\sqrt{|3a^2+20b^2-5c^2|}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/\sqrt{|\sigma_n|} \\ 1 + b/\sqrt{|\sigma_n|} \\ -1 + c/\sqrt{|\sigma_n|} \end{bmatrix}$$

Las coordenadas del punto $\boxed{M\left(\frac{a}{\sqrt{|\sigma_n|}}, 1 + \frac{b}{\sqrt{|\sigma_n|}}, -1 + \frac{c}{\sqrt{|\sigma_n|}}\right)}$

NOTA: Tensor de tensiones. Tensión octaédrica

Tricar 16.

Un sólido plástico prismático de lados 4.00 y 2.40 metros, y una longitud de 20 metros está sometido a su peso propio, de peso específico γ = 25 kN/m^3, y a una carga de tracción uniforme de intensidad p_0 = 100 kN/m² en su base. El punto O (0,0,0) de la cara superior está fijo.

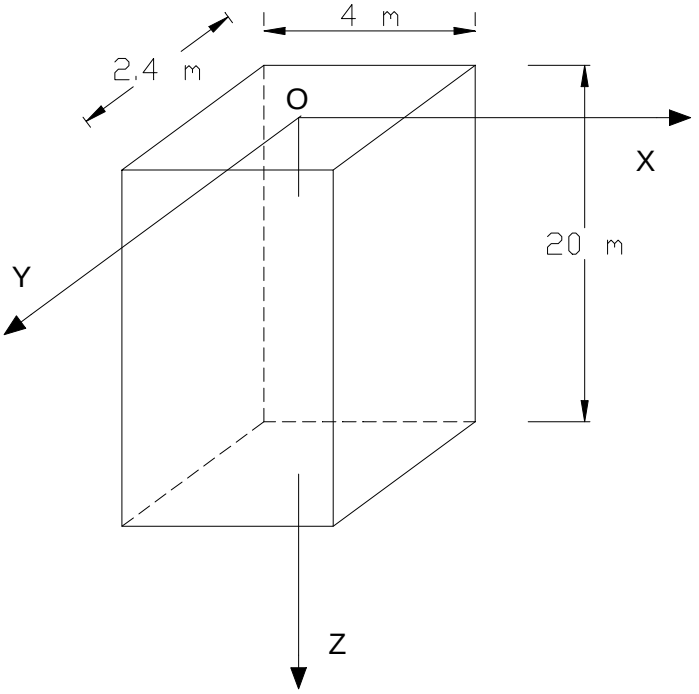
Se supone que los desplazamientos varían como sigue:

$$u = a_0.x\cdot z + a_1.x + a_2 \; ; \qquad v = b_0.y\cdot z + b_1.y + b_2 \; ; \qquad w = 1/2\, c_0.z^2 + c_1.z + 1/2\, c_2.x^2 + 1/2\, c_3.y^2 + c_4$$

El material tiene unas constantes elásticas: E = $3\cdot 10^4$ MPa y ν = 0.20.

Se pide obtener el desplazamiento del punto A (1.0, 0.6, 20.0).

(Examen de mayo de 2000)



Enunciado: **EXAMEN DE MAYO DE 2000** Tricarlo (40')

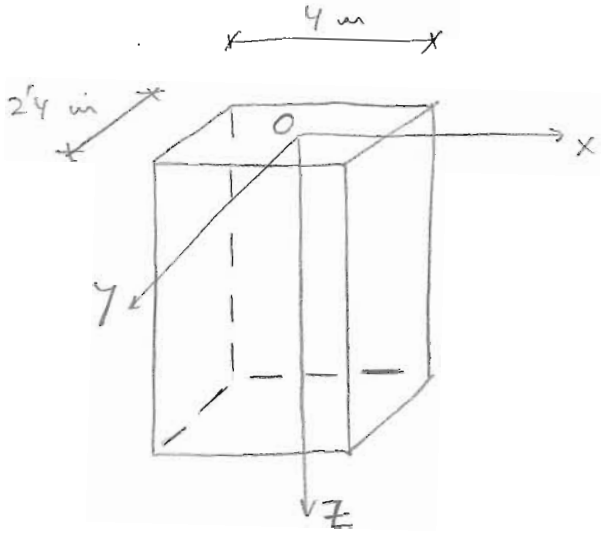
Un sólido plástico prismático de lados 4 y 2'40 m, y una longitud de 20 m está sometido a su peso propio, de peso específico $\gamma = 25\ KN/m^3$, y a una carga de tracción uniforme de intensidad $p_0 = 100\ KN/m^2$ en su base. El punto $O(0,0,0)$ de la cara superior está fijo.

Se supone que los desplazamientos varían como sigue:

$$\begin{cases} u = a_0 \cdot x \cdot z + a_1 x + a_2 \\ v = b_0 \cdot y \cdot z + b_1 y + b_2 \\ w = \frac{1}{2} c_0 \cdot z^2 + c_1 \cdot z + \frac{1}{2} c_2 x^2 + \frac{1}{2} c_3 y^2 + c_4 \end{cases}$$

El material tiene unas constantes elásticas $E = 3 \cdot 10^4\ MPa$, $\nu = 0'20$.

Se pide obtener el desplazamiento del punto $A(1, 0'6, 20)$



Resolución:

Necesitamos obtener las constantes de la ley de movimientos.

Se han de cumplir las siguientes ecuaciones:

- Equilibrio interno.
- Compatibilidad de deformaciones (siempre se cumplirán al provenir de un campo de movimientos)
- Condiciones de contorno.

Para obtener las tensiones hay que obtener primero las deformaciones y después aplicar Lamé.
Lo primero que hago es imponer que el punto O está fijo.

$$\boxed{a_2 = 0} \qquad \boxed{b_2 = 0} \qquad \boxed{c_4 = 0}$$

Ecuaciones cinemáticas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_0 z + a_1 \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_0 z + b_1 \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = b_0 \cdot y + c_3 y = (b_0 + c_3) y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = c_0 z + c_1 \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = a_0 x + c_2 x = (a_0 + c_2) x$$

Ecuaciones de Lamé:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (a_0 + b_0 + c_0) z + (a_1 + b_1 + c_1)$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0'2}{1'2 \cdot 0'6} = 8'333 \cdot 10^6 \ KN/m^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3 \cdot 10^7}{2'4} = 1'25 \cdot 10^7 \ KN/m^2$$

$$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x = 8'333 \cdot 10^6 \left[(4a_0 + b_0 + c_0) z + (4a_1 + b_1 + c_1) \right]$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y = 8'333 \cdot 10^6 \left[(a_0 + 4b_0 + c_0) z + (a_1 + 4b_1 + c_1) \right]$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z = 8'333 \cdot 10^6 \left[(a_0 + b_0 + 4c_0) z + (a_1 + b_1 + 4c_1) \right]$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = 1'25 \cdot 10^7 (a_0 + c_2) x$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = 1'25 \cdot 10^7 (b_0 + c_3) y$$

Ahora ya se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio interno en tensiones

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \rightarrow \boxed{f_x = 0}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \rightarrow \boxed{f_y = 0}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

$$1'25 \cdot 10^7 (a_0 + c_2) + 1'25 \cdot 10^7 (b_0 + c_3) + 8'333 \cdot 10^6 \cdot (a_0 + b_0 + 4c_0) + 25 = 0$$

Simplificando:

$$5a_0 + 5b_0 + 8c_0 + 3c_2 + 3c_3 = -6 \cdot 10^{-6} \qquad (I)$$

Ahora hay que aplicar las condiciones de contorno:

• CARA $x = 2$ m

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = 0 = 8'333 \cdot 10^6 \left[(4a_0 + b_0 + c_0) z + (4a_1 + b_1 + c_1) \right]$$

Como tiene que cumplirse $\forall z \rightarrow$ $4a_0 + b_0 + c_0 = 0$ (II)

$4a_1 + b_1 + c_1 = 0$ (III)

$\tau_{xy} = 0 \rightarrow 0 = 0$ ✓

$\tau_{xz} = 0 \rightarrow 1'25 \cdot 10^7 (a_0 + c_2) x = 0 \rightarrow a_0 + c_2 = 0$ (IV)

• CARA $x = -2$ m: Sale lo mismo que para $x = 2$ m

• CARA $y = 1'2$ m:

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tau_{xy} = 0 \rightarrow 0 = 0$ ✓

$\sigma_y = 0 \rightarrow a_0 + 4b_0 + c_0 = 0$ (V)

$a_1 + 4b_1 + c_1 = 0$ (VI)

$\tau_{yz} = 0 \rightarrow b_0 + c_3 = 0$ (VII)

• CARA $z = 20$ m:

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$\tau_{xz} = 0 \rightarrow a_0 + c_2 = 0$ igual que (IV)

$\tau_{yz} = 0 \rightarrow b_0 + c_3 = 0$ igual que (VII)

$\sigma_z = 100 \rightarrow 8'333 \cdot 10^6 \left(20a_0 + 20b_0 + 80c_0 + a_1 + b_1 + 4c_1\right) = 100$

$20a_0 + 20b_0 + 80c_0 + a_1 + b_1 + 4c_1 = 1'2 \cdot 10^{-5}$ (VIII)

Por lo tanto hay 8 ecuaciones con 8 incógnitas ($a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3$). Resolviendo:

$a_0 = 1'667 \cdot 10^{-7}$	$c_0 = -8'333 \cdot 10^{-7}$
$a_1 = -4 \cdot 10^{-6}$	$c_1 = 2 \cdot 10^{-5}$
$b_0 = 1'667 \cdot 10^{-7}$	$c_2 = -1'667 \cdot 10^{-7}$
$b_1 = -4 \cdot 10^{-6}$	$c_3 = -1'667 \cdot 10^{-7}$

Particularizando el campo de movimientos para el punto A(1, 0'6, 20) se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} U_A &= -6'667 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ V_A &= -4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ W_A &= 2'333 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}}$$

Tricar 17.

En el sólido elástico definido por el dominio: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$
se encuentra sometido a las deformaciones:

$$\varepsilon_x = 3\cdot a\cdot x^2 \; ; \quad \varepsilon_y = 3\cdot a\cdot y^2 \; ; \quad \varepsilon_z = 3\cdot a\cdot z^2 \; ; \quad \gamma_{xy} = b\cdot z^2+2\cdot b\cdot y\cdot z; \quad \gamma_{xz} = by^2+2\cdot b\cdot x\cdot y \; ; \quad \gamma_{yz} = b\cdot x^2+2\cdot b\cdot z\cdot x$$

con $a = 2.5\cdot 10^{-6}\ m^{-2}$, $b = 5\cdot 10^{-6}\ m^{-2}$ y $R = 5$ m

Las anteriores deformaciones proceden únicamente de la actuación de cargas másicas y de unas presiones en el contorno. El módulo de elasticidad es $E = 10^7\ kN/m^2$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$. Se pide:

1. Comprobar que las deformaciones son compatibles, es decir, que existe un campo de movimientos que las produce.

2. Determinar el campo de movimientos, suponiendo que en el origen de coordenadas éstos son nulos, así como las rotaciones.

3. Obtener las cargas másicas actuantes.

4. Deducir la presión en el punto del contorno equidistante de los planos coordenados y no contenidos en los mismos.

(Examen de diciembre de 1998)

Enunciado: EXAMEN DICIEMBRE 1998 Tricar17 (50')

En el sólido elástico definido por el dominio:

$$x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

se encuentra sometido a las deformaciones:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 3ax^2 & \gamma_{xy} = bz^2 + 2byz \\ \varepsilon_y = 3ay^2 & \gamma_{xz} = by^2 + 2bxy \\ \varepsilon_z = 3az^2 & \gamma_{yz} = bx^2 + 2bxz \end{cases}$$

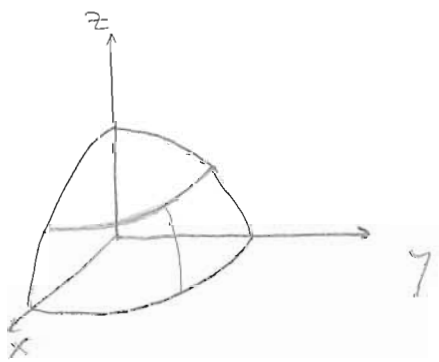
con $a = 2'5 \cdot 10^{-6}\ m^{-2}$, $b = 5 \cdot 10^{-6}\ m^{-2}$ y $R = 5\ m$.

Las anteriores deformaciones proceden únicamente de la actuación de cargas másicas y de unas presiones en el contorno. El módulo de elasticidad es $E = 10^7\ kN/m^2$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0'25$. Se pide:

1) Comprobar que las deformaciones son compatibles, es decir, que existe un campo de movimientos que las produce.
2) Determinar el campo de movimientos, suponiendo que en el origen de coordenadas éstos son nulos, así como las rotaciones.
3) Obtener las cargas másicas actuantes.
4) Deducir la presión en el punto del contorno equidistante de los planos coordenados y no contenidos en los mismos.

Resolución:

1) El sólido es:



Dado un campo de movimientos se obtiene un único campo de deformaciones, derivando el de deformaciones. Dado un campo de deformaciones, hay que integrar para llegar al campo de movimientos. Debido a las constantes de integración, este campo de movimientos no será único. Para asegurar que las deformaciones son compatibles con los movimientos, deben cumplir las ecuaciones de compatibilidad. Además, el dominio es simplemente conexo.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

Por lo tanto, las deformaciones provienen de un campo de movimientos.

2) Campo de movimientos

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 3ax^2 \rightarrow u = ax^3 + A(y,z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 3ay^2 \rightarrow v = ay^3 + B(x,z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 3az^2 \rightarrow w = az^3 + C(x,y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial A(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial B(x,z)}{\partial x} = 2by z + bz^2$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial B(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = 2bzx + bx^2$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial A(y,z)}{\partial z} + \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 2bxy + by^2$$

Suponemos que $A(y,z)$ tiene la siguiente forma:

$$A(y,z) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha_3 yz + \alpha_4 y^2 + \alpha_5 z^2 + \alpha_6 y^3 + \alpha_7 z^3 + \alpha_8 y^2 z + \alpha_9 y z^2$$

$\alpha_0 = 0 \rightarrow$ Para que los movimientos en $(0,0,0)$ sean nulos

$\alpha_4 = 0 \rightarrow$ ya que si derivo con respecto a y queda un término en y, y como $B(x,z)$, no se podría anular.

$\alpha_6 = 0 \rightarrow$ idem en y^2.

$\alpha_5 = 0 \rightarrow$ idem en z.

$\alpha_7 = 0 \rightarrow$ idem en z^2.

Por la misma razón, no podrían existir términos superiores $(y^4, z^4, y^3 z, y z^3, y^2 z^2 \ldots)$. Por lo tanto:

$$A(y,z) = \alpha_1 \cdot y + \alpha_2 \cdot z + \alpha_3 yz + \alpha_8 y^2 z + \alpha_9 y z^2$$

Extrapolando:

$$B(x,z) = \beta_1 \cdot x + \beta_2 z + \beta_3 xz + \beta_8 x^2 z + \beta_9 \cdot x z^2$$

$$C(x,y) = \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 xy + \delta_8 x^2 y + \delta_9 \cdot x y^2$$

Sustituyendo en las deformaciones transversales.

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_3 z + 2\alpha_8 yz + \alpha_9 z^2 + \beta_1 + \beta_3 z + 2\beta_8 xz + \beta_9 z^2 =$$

$$= 2byz + bz^2 \longrightarrow \alpha_1 = -\beta_1 \quad \alpha_3 = -\beta_3 \quad \alpha_8 = b$$

$$\alpha_9 + \beta_9 = b \qquad \beta_8 = 0$$

$$\gamma_{yz} = \beta_2 + \beta_3 x + \cancel{\beta_8}_{0} x^2 + 2\beta_9 xz + \delta_2 + \delta_3 x + \delta_8 x^2 + 2\delta_9 xy = 2bzx + bx^2$$

$$\beta_2 = -\delta_2 \qquad \beta_3 = -\delta_3 \qquad \beta_9 = b \qquad \delta_8 = b \qquad \delta_9 = 0$$

$$\gamma_{xz} = \alpha_2 + \alpha_3 y + \alpha_8 y^2 + 2\alpha_9 yz + \delta_1 + \delta_3 y + 2\delta_8 xy + \cancel{\delta_9}_{0} y^2 = 2bxy + by^2$$

$$\alpha_2 = -\delta_1 \qquad \alpha_3 = -\delta_3 \qquad \alpha_8 = b \qquad \alpha_9 = 0 \qquad \delta_8 = b$$

Por lo tanto, los movimientos quedan:

$$\begin{cases} u = ax^3 + \alpha_1 y + \alpha_2 z + by^2 z \\ v = ay^3 - \alpha_1 x + \beta_2 z + bxz^2 \\ w = az^3 - \alpha_2 x - \beta_2 y + bx^2 y \end{cases}$$

Condiciones de contorno:

$$u(0,0,0) = v(0,0,0) = w(0,0,0) = 0 \rightarrow \text{No saco nada}$$

Rotaciones:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(-\alpha_1 + bz^2 - \alpha_1 - 2byz\right)$$

$$\omega_{xy}(0,0,0) = -\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(-\beta_2 + bx^2 - \beta_2 - 2bxz\right)$$

$$\omega_{yz}(0,0,0) = -\beta_2 = 0 \rightarrow \beta_2 = 0$$

$$\omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + by^2 + \alpha_2 + 2bxy\right)$$

$$\omega_{zx}(0,0,0) = \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$$

Por lo tanto, los movimientos son:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= ax^3 + by^2 z \\ v &= ay^3 + bxz^2 \\ w &= az^3 + bx^2 y \end{aligned}}$$

3) Cargas másicas actuantes. Necesito aplicar las ecuaciones de equilibrio interno, para lo que necesito las tensiones. Por lo tanto, aplico Lamé.

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{10^7 \cdot 0'25}{1'25 \cdot 0'5} = 4 \cdot 10^6 \ KN/m^2$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3a(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 4 \cdot 10^6 \ KN/m^2 \qquad a = 2'5 \cdot 10^{-6} \ m^{-2}$$

$$b = 5 \cdot 10^{-6} \ m^{-2}$$

Sustituyendo estos valores:

$$\sigma_x = 1'2 \cdot 10^7 \cdot a(x^2 + y^2 + z^2) + 2'4 \cdot 10^7 \cdot a x^2 = 90x^2 + 30y^2 + 30z^2$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2G \cdot \varepsilon_y = 30x^2 + 90y^2 + 30z^2$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z = 30x^2 + 30y^2 + 90z^2$$

$$\tau_{xy} = 40yz + 20z^2$$

$$\tau_{yz} = 40xz + 20x^2$$

$$\tau_{xz} = 40xy + 20y^2$$

Ahora puedo aplicar las ecuaciones de equilibrio interno

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \rightarrow 180x + 40z + f_x = 0$$

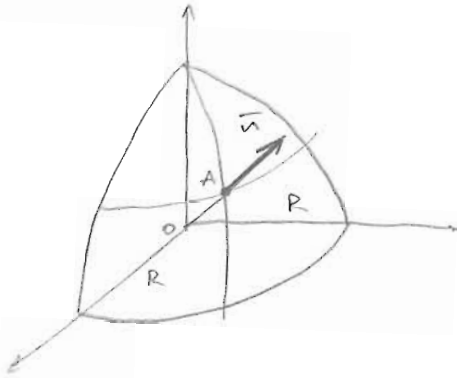
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \rightarrow 180y + 40x + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \rightarrow 40y + 180z + f_z = 0$$

Por lo tanto, las fuerzas másicas son

$$\boxed{\begin{aligned} f_x &= -180x - 40z \\ f_y &= -40x - 180y \\ f_z &= -40y - 180z \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(\text{en } KN/m^3) \\ &(\text{en } KN/m^3) \\ &(\text{en } KN/m^3) \end{aligned}$$

4)



$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R, \frac{\sqrt{3}}{3}R, \frac{\sqrt{3}}{3}R\right)$$

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

El tensor de tensiones en A es:

$$\underline{T_A} = \begin{bmatrix} 50R^2 & 20R^2 & 20R^2 \\ 20R^2 & 50R^2 & 20R^2 \\ 20R^2 & 20R^2 & 50R^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1250 & 500 & 500 \\ 500 & 1250 & 500 \\ 500 & 500 & 1250 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T_A} \cdot \bar{n} = \frac{2250}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al ser normal a la superficie

$$p = \bar{n}^T \bar{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\frac{2250}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2250}{3} \cdot 3 = \boxed{2250\ KN/m^2}$$

NOTA: Con las deformaciones hay que obtener todo lo demás.

Enunciado Tricar 18

La ley de Hooke generalizada se puede escribir en el caso del material elástico anisótropo más general, para un sistema cartesiano XYZ, como sigue.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Se pide:

1) Indicar razonadamente cuántos coeficientes independientes S_{ij} resultan en el caso más general.
2) Idem. en el caso de material ortótropo con comportamientos distintos según los tres ejes
3) Idem. en el caso de material ortótropo con comportamientos iguales según x e y, pero distinto según z.
4) Idem en un material isótropo

Resolución:

1) Caso general. La compatibilidad exige que la matriz sea simétrica

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \text{SIM} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, hay 21 coeficientes independientes

2) Material ortótropo. El comportamiento del material es diferente según las tres direcciones, por lo que la matriz será de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G_{yz}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G_{zx}} & 0 \\ & \text{sim} & & & & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, un material ortótropo posee 9 coeficientes independientes: 3 módulos de elasticidad, 3 coeficientes de Poisson y 3 módulos de elasticidad transversal.

3) Material ortótropo con igual x-y. En este caso se tiene:

$$\left| \begin{array}{l} E_x = E_y \\ \nu_{zx} = \nu_{yz} \\ G_{zx} = G_{yz} \end{array} \right.$$

La matriz será:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G_{zx}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G_{zx}} & 0 \\ & \text{sim} & & & & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el número de coeficientes independientes es de 6.

4) En un material isótropo, se tiene

$$\left| \begin{array}{l} E_x = E_y = E_z = E \\ \nu_{yz} = \nu_{zx} = \nu_{xy} = \nu \\ G_{yz} = G_{zx} = G_{xy} = G \end{array} \right.$$

Por lo tanto, la matriz es:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & \frac{1}{2G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Por tanto, sólo hay dos coeficientes independientes, ya que $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

NOTA: Ley de Hooke tridimensional

Enunciado: Tricar 19 (10')

El estado de tensión en un punto P está dado por el tensor:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1) Determinar las constantes a, b, c para que el vector tensión se anule en el plano cuya normal forma ángulos iguales con los tres ejes coordenados.
2) Para la circunstancia anterior, obtener las tensiones principales y direcciones asociadas.

Resolución:

1)

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$$

Por lo tanto:

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left| \begin{array}{l} 1 + a + b = 0 \\ a + 1 + c = 0 \\ b + c + 1 = 0 \end{array} \right. \longrightarrow \boxed{a = b = c = -0'5}$$

2) El tensor de tensiones queda:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & -0'5 & -0'5 \\ -0'5 & 1 & -0'5 \\ -0'5 & -0'5 & 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores y autovectores son:

$$\left|\begin{array}{lll} \sigma_I = 1'5 & \longrightarrow (1, -0'5, -0'5) & \xrightarrow{NORM} (0'8165, -0'4082, -0'4082) \\ \sigma_{II} = 1'5 & \longrightarrow (-0'4483, 1, -0'5517) & \xrightarrow{NORM} (-0'3654, 0'815, -0'45) \\ \sigma_{III} = 0 & \longrightarrow (1, 1, 1) & \xrightarrow{NORM.} (0'5774, 0'5774, 0'5774) \end{array}\right.$$

No salen ortogonales. Al haber dos tensiones principales iguales, el elipsoide de tensiones es de revolución, por lo que existe un conjunto infinito de parejas de direcciones principales.

NOTA: Tensor de tensiones en 3D. Obtención de tensiones principales y direcciones asociadas.

Enunciado: EXAMEN ABRIL 2001 Tricarzo (35')

1) Dado el siguiente campo de deformaciones.

$$\varepsilon_x = (y+z)\cdot 10^{-6} \qquad \gamma_{yz} = (y+z)\cdot 10^{-6}$$
$$\varepsilon_y = (z+x)\cdot 10^{-6} \qquad \gamma_{zx} = (z+x)\cdot 10^{-6}$$
$$\varepsilon_z = (x+y)\cdot 10^{-6} \qquad \gamma_{xy} = (x+y)\cdot 10^{-6}$$

Se pide: a) Demostrar que es posible.

b) Determinar el alargamiento del segmento OA, siendo O(0,0,0), A(4,2,3).

2) En un sólido elástico existe la siguiente distribución de tensiones

$$\sigma_x = 6x + 3y + 3z \qquad \tau_{yz} = x$$
$$\sigma_y = 3x + 6y + 3z \qquad \tau_{zx} = y$$
$$\sigma_z = 3x + 3y + 6z \qquad \tau_{xy} = z$$

Se supone que no existen acciones térmicas. En esas condiciones se pide

a) Obtener los valores de las cargas másicas.

b) Demostrar que el campo de tensiones dado puede ser solución de algún problema elástico. ¿En qué casos no es solución?

3) En un punto O de un sólido elástico, las tensiones son, en KN/m^2:

$$\sigma_x = 50 \quad \sigma_y = 10 \quad \sigma_z = -30 \quad \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{xz} = 0$$

Con relación al plano π, igualmente inclinado respecto a los tres ejes, se pide obtener el módulo y los cosenos directores de las componentes normal y tangencial a dicho plano del vector tensión en O asociado al plano π.

Resolución:

1) a) Para que el campo de deformaciones sea posible, tiene que provenir de un campo de movimientos, por lo que tiene que cumplir las ecuaciones de compatibilidad.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \longrightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

Y en las otras cinco ecuaciones salen identidades $0=0$.
Por lo tanto, el campo de deformaciones es posible.

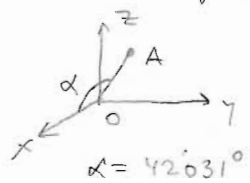
b) Alargamiento de OA. $O(0,0,0)$ $A(4,2,3)$.

El tensor de deformaciones es:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} (y+z) & \frac{1}{2}(x+y) & \frac{1}{2}(x+z) \\ \frac{1}{2}(x+y) & (x+z) & \frac{1}{2}(y+z) \\ \frac{1}{2}(x+z) & \frac{1}{2}(y+z) & (x+y) \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \qquad \bar{n}_{OA} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{OA} = \bar{n}_{OA}^T \cdot D \cdot \bar{n}_{OA} = \frac{1}{\sqrt{29}} [4,2,3] \underline{D} \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (33x + 39y + 38z) \cdot \frac{10^{-6}}{\sqrt{29}}$$

La ecuación de la recta OA es: $\begin{cases} y = 0'5x \\ z = 0'75x \end{cases}$



Por tanto: $\varepsilon_{OA} = (33 \cdot x + 39 \cdot 0'5x + 38\ 0'75x) \cdot \frac{10^{-6}}{29} = 2'793 \cdot 10^{-6} \cdot x$

$$\Delta l_{OA} = \int_0^A \varepsilon_{AC} \cdot dl_{AC} = \int_0^4 2'793 \cdot 10^{-6} x \cdot \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{2'793 \cdot 10^{-6}}{0'7428} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = 3'01 \cdot 10^{-5}\ m$$

2) a) Hay que aplicar las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \rightarrow 6 + 0 + 0 + f_x = 0 \rightarrow \boxed{f_x = -6}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \rightarrow \boxed{f_y = -6}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \rightarrow \boxed{f_z = -6}$$

b) Debe cumplir las ecuaciones de compatibilidad de movimientos y las condiciones de contorno, que no se conocen. Vamos a ver las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right) = \frac{1}{E}\left[6x + 3y + 3z - \nu(6x + 9y + 9z)\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[x(6-6\nu) + y(3-9\nu) + z(3-9\nu)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left[\sigma_x + \sigma_z\right]\right) = \frac{1}{E}\left[3x + 6y + 3z - \nu(9x + 6y + 9z)\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[x(3-9\nu) + y(6-6\nu) + z(3-9\nu)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[x(3-9\nu) + y(3-9\nu) + z(6-6\nu)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{z}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{y}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{x}{G}$$

Aplicando las ecuaciones de compatibilidad.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \longrightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

Como todas las expresiones de las deformaciones sólo tienen términos de primer grado en x, y, z, las seis ecuaciones dan expresiones del tipo $0=0$. Por lo tanto, el campo de tensiones puede ser solución de un problema elástico. No sería solución en caso de no cumplir las condiciones de contorno del problema concreto.

3) Se trata de la tensión octaédrica. El tensor de tensiones

$$\underline{T}^0 = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} \qquad \overline{n}_\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{t} = \underline{T}^0 \cdot \overline{n}_\pi = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ -30 \end{bmatrix} \quad (kN/m^2)$$

$$\boxed{\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}50\\10\\-30\end{bmatrix} = 10\ KN/m^2} \quad \text{con } \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{10}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}50\\10\\-30\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}10\\10\\10\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}40\\0\\-40\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{|\bar{t}|^2 - \sigma^2} = \sqrt{1066'666} = 32'66\ KN/m^2} \quad \text{con } \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

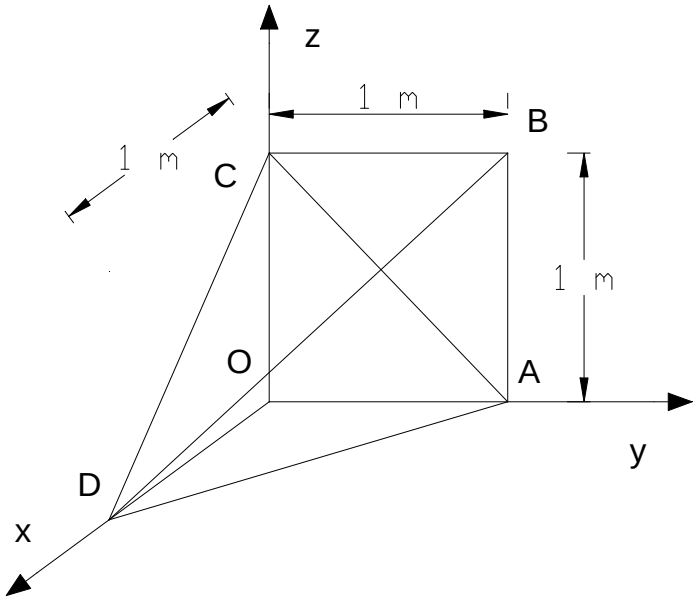
NOTA: Problemas varios en coordenadas cartesianas en 3D.

Tricar 21.

El tetraedro irregular de vértices A (0, 1, 0); B (0, 1, 1); C (0, 0, 1) y D (1, 0, 0) de la figura se encuentra en el interior de un sólido elástico sometido a unas cargas exteriores que producen en su interior un estado de tensión constante.

Se conocen los vectores tensión total sobre tres de las cuatro caras del tetraedro, que son, en kN/m^2, sobre ABD (212.1; 70.7; 245.0); sobre BCD (457.1; 0; 174.2) y sobre ABC (-300.0; 0; -346.4). Se pide:

1. Tensor de tensiones en cualquier punto del sólido.
2. Tensión total sobre la cuarta cara del tetraedro.
3. Tensiones principales y sus direcciones.
4. Tensiones tangenciales máximas y sus direcciones.
5. Coeficiente de seguridad a rotura del sólido si las tensiones de rotura son, en kN/m^2, a tracción 2500, a compresión 30000 y a cortante 1500, e indicar la causa de la rotura (se acepta la hipótesis de que las tensiones crecen linealmente con la carga exterior hasta la rotura).

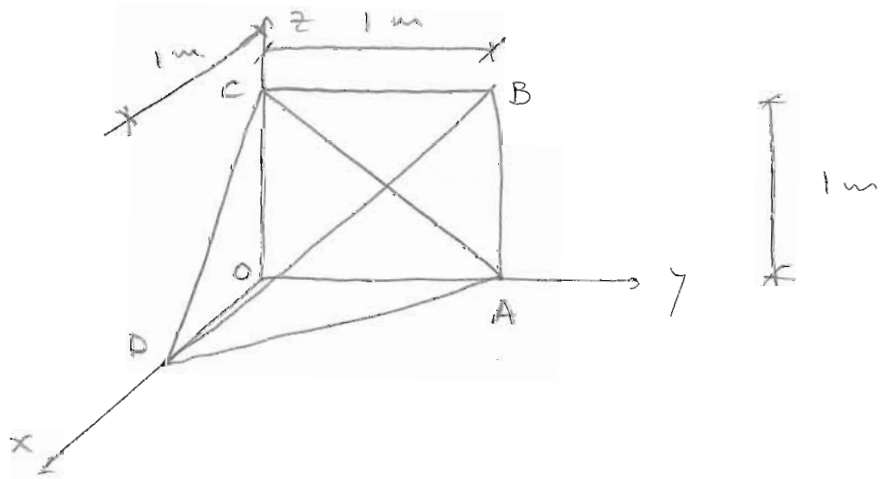


Enunciado: Tricar 21

El tetraedro irregular de vértices A(0,1,0), B(0,1,1), C(0,0,1) y D(1,0,0) de la figura se encuentra en el interior de un sólido elástico sometido a unas cargas exteriores que producen en su interior un estado de tensión constante.

Se conocen los vectores tensión total sobre tres de las cuatro caras del tetraedro, que son, en KN/m², sobre ABD (212'1, 70'7, 245'0), sobre BCD (457'1, 0, 174'2) y sobre ABC (-300'0, 0, -346'4). Se pide.

1) Tensor de tensiones en cualquier punto del sólido.
2) Tensión total sobre la cuarta cara del tetraedro.
3) Tensiones principales y sus direcciones.
4) Tensiones tangenciales máximas y sus direcciones
5) Coeficiente de seguridad a rotura del sólido si las tensiones de rotura son, en KN/m², a tracción 2500, a compresión 30000 y a cortante 1500, e indicar la causa de la rotura (se acepta la hipótesis de que las tensiones crecen linealmente con la carga exterior hasta la rotura)



Resolución:

1) Tensor de tensiones.

• Cara ABC: $\bar{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \rightarrow \begin{bmatrix} -300 \\ 0 \\ -346'4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Operando: $\sigma_x = 300 \ KN/m^2$

$\tau_{xy} = 0 \ KN/m^2$

$\tau_{xz} = 346'4 \ KN/m^2$

• Cara ABD: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \rightarrow \begin{bmatrix} 212'1 \\ 70'7 \\ 245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 346'4 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 346'4 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Operando: $212'1 = 212'1$ ✓

$\sigma_y = 100 \ KN/m^2$

$\tau_{yz} = 0 \ KN/m^2$

• Cara BCD: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \rightarrow \begin{bmatrix} 457'1 \\ 0 \\ 174'2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 346'4 \\ 0 & 100 & 0 \\ 346'4 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Operando: $457'1 = 457'1$ ✓

$0 = 0$ ✓

$\sigma_z = -100 \ KN/m^2$

Por lo tanto, el tensor de tensiones es:

$$\boxed{\underline{T} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 346'4 \\ 0 & 100 & 0 \\ 346'4 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad (\text{en } KN/m^2)}$$

2) Tensión total en cara ACD $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 346'4 \\ 0 & 100 & 0 \\ 346'4 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{t} = \begin{bmatrix} -373'2 \\ -57'74 \\ -142'26 \end{bmatrix} \quad (\text{en } KN/m^2)}$$

3) Tensiones principales y sus direcciones. Resolviendo:

$$\sigma_1 = 500 \text{ KN/m}^2 \quad \text{con} \quad \bar{n}_1 = \begin{bmatrix} 0'866 \\ 0 \\ 0'5 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 = 100 \text{ KN/m}^2 \quad \text{con} \quad \bar{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = -300 \text{ KN/m}^2 \quad \text{con} \quad \bar{n}_3 = \begin{bmatrix} -0'5 \\ 0 \\ 0'866 \end{bmatrix}$$

4) Tensiones tangenciales máximas y sus direcciones.

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 400 \text{ KN/m}^2$$

$$\bar{n}_{\tau_{MAX}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{n}_1 + \bar{n}_3) = \begin{bmatrix} 0'259 \\ 0 \\ 0'966 \end{bmatrix}$$

5) Coeficiente de seguridad a rotura.

$$\sigma^R_{TRACCIÓN} = 2500 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma^R_{COMPRESIÓN} = 30000 \text{ KN/m}^2$$

$$\tau^R = 1500 \text{ KN/m}^2$$

$$\gamma_{TRACCIÓN} = \frac{2500}{500} = 5$$

$$\gamma_{COMPRESIÓN} = \frac{30000}{300} = 100$$

$$\gamma_{CORTANTE} = \frac{1500}{400} = 3'75$$

Por lo tanto, el menor coeficiente de seguridad es frente a cortante, y romperá por tensiones tangenciales.

$$\boxed{\gamma = 3'75}$$

NOTA: Tensiones principales y tensor de tensiones en sólido tridimensional

Enunciado: Tricar 22

1) Obtener la tensión tangencial octaédrica en función de los invariantes I_1, I_2, I_3 del tensor de tensiones.

2) En un punto A de un sólido elástico las tensiones son:

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & -75 \\ 80 & -75 & -30 \end{bmatrix} \quad (\text{en } KN/m^2)$$

Obtener las tensiones normales y tangenciales máximas.

Resolución:

1) El vector tensión octaédrica representa la tensión que se produce en los planos normales a la recta bisectriz de los ejes principales, es decir, al plano cuya normal es:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ (con el sistema de referencia de los ejes principales)

Por lo tanto, hay que obtener las tensiones principales, para expresar el tensor de tensiones en dichos ejes.
Los invariantes del tensor de tensiones son:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 =$$
$$= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

Y las tensiones principales resultan de resolver la siguiente ecuación cúbica:

$$\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0$$

Y la tensión tangencial octaédrica es:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2+\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\sigma_2\sigma_3} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)}$$

Como $\left| \begin{array}{l} I_1^2 = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3) \\ I_2 = (\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3) \end{array} \right.$

Resulta: $I_1^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2I_2$

$$(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) = I_1^2-2I_2$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{2I_1^2-4I_2-2I_2} = \frac{1}{3}\sqrt{2I_1^2-6I_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{I_1^2-3I_2}}$$

2) $\underline{T} = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & -75 \\ 80 & -75 & -30 \end{bmatrix}$ (en KN/m^2)

Las tensiones principales son:

$\sigma_1 = 99'62\ KN/m^2$ con $\bar{n}_1^T = [0'864, 0'057, 0'5]$

$\sigma_2 = 58'57\ KN/m^2$ con $\bar{n}_2^T = [0'233, 0'836, -0'497]$

$\sigma_3 = -138'19\ KN/m^2$ con $\bar{n}_3^T = [-0'446, 0'546, 0'709]$

La tensión normal máxima es de $138'19\ KN/m^2$ a compresión.

La tensión tangencial máxima es:

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = \frac{1}{2}(99'62+138'19) = 118'91\ \frac{KN}{m^2}$$

Y se produce en la dirección:

$$\bar{n}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{n}_1^T+\bar{n}_3^T) = [0'296, 0'426, 0'855]$$

Enunciado: Tricar 23

En un sólido elástico existe la siguiente distribución de tensiones:

$$\sigma_x = (1+\alpha)ax + by + cz \qquad \tau_{xy} = c' \cdot z$$

$$\sigma_y = ax + (1+\alpha)by + cz \qquad \tau_{xz} = b' \cdot y$$

$$\sigma_z = ax + by + (1+\alpha)cz \qquad \tau_{yz} = a' \cdot x$$

Se supone que no actúan acciones térmicas. En estas condiciones se pide:

1) Demostrar que las cargas másicas son constantes.
2) Obtener los valores de las cargas másicas.
3) Demostrar que el campo de tensiones dado puede ser solución de algún problema elástico. ¿En qué casos no es solución?

Resolución:

1) Lo primero que planteamos son las ecuaciones de equilibrio.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \rightarrow (1+\alpha)a + f_x = 0 \rightarrow f_x = -a(1+\alpha)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \rightarrow (1+\alpha)b + f_y = 0 \rightarrow f_y = -b(1+\alpha)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \rightarrow (1+\alpha)\cdot c + f_z = 0 \rightarrow f_z = -c(1+\alpha)$$

2) Obtenidas en el apartado anterior.

3) Obtenemos las deformaciones y aplicamos las condiciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right] = \frac{1}{E}\Big[(1+\alpha)ax + by + cz -$$

$$- \nu ax - \nu(1+\alpha)by - \nu cz - \nu ax - \nu by - \nu(1+\alpha)cz\Big] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[ax(1+\alpha-2\nu) + by(1-\nu\alpha-2\nu) + cz(1-\nu\alpha-2\nu)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z\right] = \frac{1}{E}\left[-\nu(1+\alpha)ax - \nu by - \nu cz + \right.$$

$$\left. + ax + (1+\alpha)by + cz - \nu ax - \nu by - \nu(1+\alpha)cz\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[ax(1-\nu\alpha-2\nu) + by(1+\alpha-2\nu) + cz(1-\nu\alpha-2\nu)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z\right] = \frac{1}{E}\left[-\nu(1+\alpha)ax - \nu by - \nu cz - \right.$$

$$\left. - \nu ax - \nu(1+\alpha)by - \nu cz + ax + by + (1+\alpha)cz\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[ax(1-\nu\alpha-2\nu) + by(1-\nu\alpha-2\nu) + cz(1+\alpha-2\nu)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{c'z}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{b'y}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{a'x}{G}$$

Aplicando las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones, se tiene:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z} \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\,\partial z} \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2\,\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

Y las otras dos dan también $0 = 0$ ✓

Si cumple las condiciones de contorno, será solución del problema elástico.

Enunciado: Tricar 24

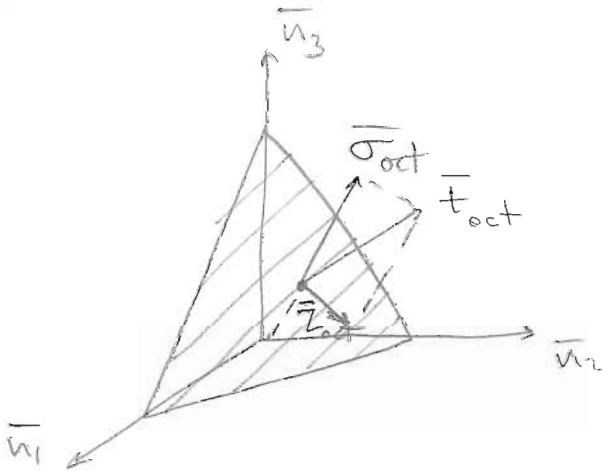
En un punto A de un sólido elástico las tensiones principales son, en KN/m^2:

$$\sigma_1 = 50\ KN/m^2$$
$$\sigma_2 = -50\ KN/m^2$$
$$\sigma_3 = -75\ KN/m^2$$

Se pide calcular la tensión normal y tangencial sobre un elemento de superficie igualmente inclinado sobre los tres ejes principales.

Resolución:

En realidad, lo que nos piden es la tensión octrédrica. Por lo tanto:



$$\boxed{\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -25\ KN/m^2}$$

$$\boxed{\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2} = 54\ KN/m^2}$$

NOTA: Problema de tensión octrédrica.

Enunciado: $\boxed{\text{EXAMEN ABRIL 2003}}$ Tricar 24

Dado el tensor de tensiones en un punto A de un sólido elástico

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 0 \\ 100 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

se pide:

1) Indicar si existe algún plano sobre el que $\sigma = 150$ y $\tau = 75$. En ese caso indicar las componentes de su vector normal con respecto a un sistema de ejes.

2) De los planos que contienen al punto A se consideran aquéllos en los que $\sigma = 100$. Calcular en cuál de ellos (definido por su vector normal unitario) es máxima la tensión tangencial y el valor de la misma.

3) Se considera el sistema de ejes formado por los ejes principales. Se denomina tensor esférico de tensiones a aquél que tiene iguales valores en todos los elementos de la diagonal principal y nulos los demás elementos. Expresar el tensor esférico y el tensor desviador (la diferencia entre el total y el esférico) referidos ambos a los ejes principales.

4) Obtener los valores de los invariantes I_1, I_2, I_3 del tensor desviador.

5) Deducir la relación existente entre la tensión cúbica y la deformación cúbica en un punto.

6) Expresar de manera clara y concisa cuál es la razón de ser de las ecuaciones de compatibilidad en deformaciones

Resolución:

1) El vector tensión es: $\bar{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 0 \\ 100 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$

con $\boxed{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1}$ (I)

Operando: $\bar{t} = \begin{bmatrix} 50\, n_x + 100\, n_y \\ 100\, n_x + 200\, n_y \\ 150\, n_z \end{bmatrix}$

La tensión normal es:

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = [n_x \; n_y \; n_z] \begin{bmatrix} 50 n_x + 100 n_y \\ 100 n_x + 200 n_y \\ 150 n_z \end{bmatrix} =$$

$$= 50 n_x^2 + 100 n_x n_y + 100 n_x n_y + 200 n_y^2 + 150 n_z^2 = 150$$

Operando: $\boxed{n_x^2 + 4 n_y^2 + 3 n_z^2 + 4 n_x n_y = 3}$ (II)

Por tanto: $\bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 150 n_x \\ 150 n_y \\ 150 n_z \end{bmatrix}$

$$\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 50 n_x + 100 n_y \\ 100 n_x + 200 n_y \\ 150 n_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 150 n_x \\ 150 n_y \\ 150 n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 n_x + 100 n_y \\ 100 n_x + 50 n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = 75 = \sqrt{(-100 n_x + 100 n_y)^2 + (100 n_x + 50 n_y)^2}$$

Operando: $\boxed{32 n_x^2 + 20 n_y^2 - 16 n_x n_y = 9}$ (III)

El sistema resulta incompatible, por lo que no existe ningún plano que cumpla las condiciones indicadas.

2) Se tiene:

$\boxed{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1}$ (I)

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} 50 n_x + 100 n_y \\ 100 n_x + 200 n_y \\ 150 n_z \end{bmatrix}$$

$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = 100 \longrightarrow \boxed{n_x^2 + 4 n_y^2 + 3 n_z^2 + 4 n_x n_y = 2}$ (II)

$\bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 100 n_x \\ 100 n_y \\ 100 n_z \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -50 n_x + 100 n_y \\ 100 n_x + 100 n_y \\ 50 n_z \end{bmatrix}$

$\boxed{\tau^2 = 12500 n_x^2 + 20000 n_y^2 + 10000 n_x n_y + 2500 n_z^2}$ (III)

Sustituyendo (I) y (II) en (III) queda $\tau^2 = 15000 - 15000 n_z^2$

El máximo está en $n_z = 0$ y la máxima tensión tangencial es $\boxed{\tau_{MAX} = 122'474}$

En las direcciones $\boxed{\bar{n} = \begin{bmatrix} -0'41 \\ 0'9121 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{n}' = \begin{bmatrix} 0'9756 \\ 0'2193 \\ 0 \end{bmatrix}}$

3) El tensor de tensiones referido a los ejes principales puede descomponerse en el tensor esférico y el desviador. El tensor esférico tiene todos los valores de la diagonal principal iguales a la tensión normal octaédrica (σ_{no}) y el resto nulos. El tensor desviador es la diferencia entre el total y el esférico.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{no} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{no} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{no} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{no} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{no} \end{bmatrix}$$

Siendo $\sigma_{no} = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

Por tanto, lo primero es obtener las tensiones principales:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 250 \\ \sigma_2 = 150 \\ \sigma_3 = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \sigma_{no} = \frac{400}{3}$$

Y los tensores esférico y desviador son:

$$\boxed{\underline{T}^{ESF} = \begin{bmatrix} \frac{400}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{400}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{400}{3} \end{bmatrix} \qquad \underline{T}^{DES} = \begin{bmatrix} \frac{350}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{400}{3} \end{bmatrix}}$$

4) Invariantes del tensor desviador:

Si los componentes de la diagonal principal del tensor desviador son: $d_1 = \frac{350}{3}$ $d_2 = \frac{50}{3}$ $d_3 = \frac{-400}{3}$ se tiene:

$$\boxed{I_1 = d_1 + d_2 + d_3 = 0}$$

$$\boxed{I_2 = d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_1 d_3 = -47500}$$

$$\boxed{I_3 = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix} = \frac{-7000000}{27}}$$

5) Deducir la relación entre tensión cúbica y deformación cúbica.

TENSIÓN CÚBICA: $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

DEFORM. CÚBICA: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Como:
$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda \cdot e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda \cdot e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda \cdot e + 2G\varepsilon_z \end{cases}$$

Sustituyendo:

$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda e + 2G \cdot e$ siendo $\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ y $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Y, por lo tanto

$$\boxed{s = \frac{E \cdot e}{(1-2\nu)}}$$

6) Razón de ser de las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones

Si se conocen las funciones continuas y derivables de los desplazamientos se pueden obtener las deformaciones derivando

Si se plantea el problema inverso, en general no tiene solución excepto si se satisface una serie de relaciones entre las deformaciones que se denominan ecuaciones de compatibilidad.

Son, en resumen, las condiciones de integrabilidad.

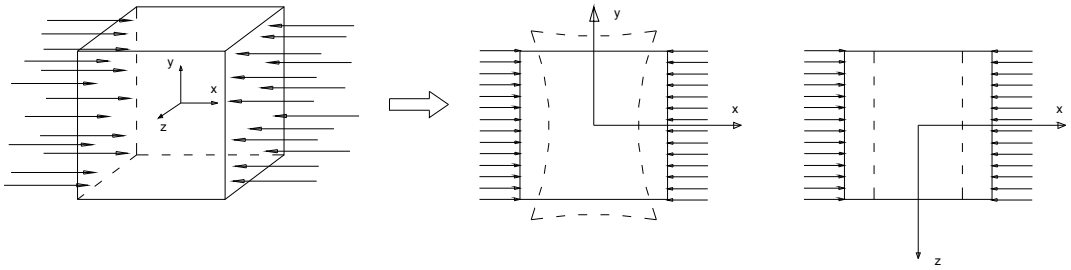
CAPÍTULO 5- ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

5.1- INTRODUCCIÓN

Es habitual recurrir a simplificaciones basadas en suponer que el sólido puede dividirse en rebanadas, con comportamientos independientes entre ellas. Existen dos tipos de simplificaciones:

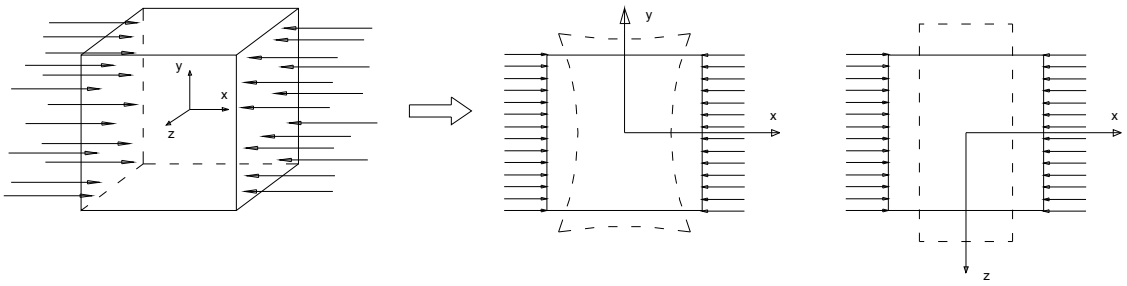
Deformación plana:

Se supone que el tensor de deformaciones es una matriz de 2 x 2 en todos los puntos del sólido elástico. Sólo hay deformaciones en dos direcciones.



Tensión plana:

Se supone que el tensor de tensiones es una matriz de 2 x 2 en todos los puntos del sólido elástico. Sólo hay tensiones en dos direcciones.



5.2- DEFORMACIÓN PLANA

Se suele producir en sólidos prismáticos y con generatrices paralelas al eje z, de longitud muy larga con respecto a la anchura y altura de la base, bajo fuerzas normales a las generatrices.

Todas las secciones normales al eje z se deforman por igual y se mantienen, durante la deformación, planas y perpendiculares al eje z. Se suele aplicar en vigas, barras, cables, túneles, presas de gravedad, etc.

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

DEFORMACIONES	TENSIONES
$\varepsilon_z = 0$	$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$
$\gamma_{xz} = 0$	$\tau_{xz} = 0$
$\gamma_{yz} = 0$	$\tau_{yz} = 0$

Las diversas relaciones quedan de la siguiente manera:

Ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \qquad f_z = 0$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[(1-\upsilon^2) \cdot \sigma_x - \upsilon \cdot (1+\upsilon) \cdot \sigma_y \right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[(1-\upsilon^2) \cdot \sigma_y - \upsilon \cdot (1+\upsilon) \cdot \sigma_x \right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}$$

Fórmulas de Lamé:

$$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x \qquad \text{con} \qquad \lambda = \frac{\upsilon \cdot E}{(1+\upsilon)\cdot(1-2\cdot\upsilon)}$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y \qquad G = \frac{E}{2\cdot(1+\upsilon)}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \qquad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Movimientos:

u = u (x,y) v = v (x,y) w = cte

Deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Condiciones de contorno: Se aplican las siguientes:

- SUPERFICIES LATERALES: No existen fuerzas en el contorno lateral con componentes sobre la dirección de las generatrices.

$$\overline{p_x} = \alpha \cdot \sigma_x + \beta \cdot \tau_{xy}$$

$$\overline{p_y} = \alpha \cdot \tau_{xy} + \beta \cdot \sigma_y$$

$$\overline{p_z} = 0$$

- SUPERFICIES EXTREMAS (z = 0; z = L): Las fuerzas en las secciones extremas deben ser normales a éstas.

Ecuaciones de Beltrami-Mitchell:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-1}{1-\upsilon}\cdot\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \qquad \text{con} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

5.3- TENSIÓN PLANA

Se supone tensión plana en sólidos con el espesor según el eje z muy pequeño en comparación con la anchura y la altura, sometidos a un sistema de cargas contenido en su plano medio, por lo que resultan nulas las componentes de la tensión en el eje z.

Se suele aplicar en placas, chapas, lajas, etc.

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad \underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

DEFORMACIONES

$$\varepsilon_z = \frac{-\lambda}{2 \cdot G + \lambda} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

TENSIONES

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$

Las diversas relaciones quedan de la siguiente manera:

Ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \qquad f_z = 0$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \upsilon \cdot \sigma_y\right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \upsilon \cdot \sigma_x\right] \qquad \varepsilon_z = \frac{-\upsilon}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-\upsilon}{1-\upsilon} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}$$

Fórmulas de Lamé:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\upsilon^2)} \cdot (\varepsilon_x + \upsilon \cdot \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\upsilon^2)} \cdot (\upsilon \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

Deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Condiciones de contorno: Se aplican las siguientes:

- SUPERFICIES LATERALES: No existen fuerzas en el contorno lateral con componentes sobre la dirección de las generatrices.

$$\overline{p_x} = \alpha \cdot \sigma_x + \beta \cdot \tau_{xy}$$

$$\overline{p_y} = \alpha \cdot \tau_{xy} + \beta \cdot \sigma_y$$

$$\overline{p_z} = 0$$

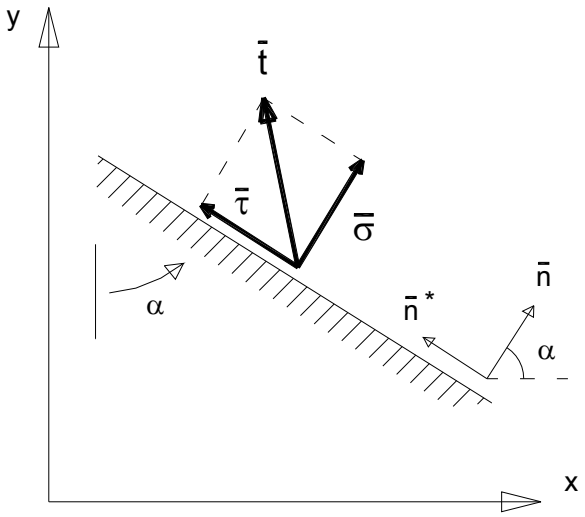
- SUPERFICIES EXTREMAS (z = 0; z = L): No hay fuerzas aplicadas.

$$\overline{p_x} = \overline{p_y} = \overline{p_z} = 0$$

Ecuaciones de Beltrami-Mitchell:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\upsilon) \cdot \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \qquad \text{con} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

5.4- TENSIONES SOBRE UN PLANO



$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \qquad \bar{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} \qquad \bar{n}^* = \begin{bmatrix} -sen\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} \qquad \bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n} \qquad \tau = \sqrt{|\bar{t}|^2 - |\bar{\sigma}|^2} \qquad \bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \bar{n}^{*T} \cdot \bar{t}$$

Las expresiones de las componentes son:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot sen2\alpha$$

$$\tau = -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot sen2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

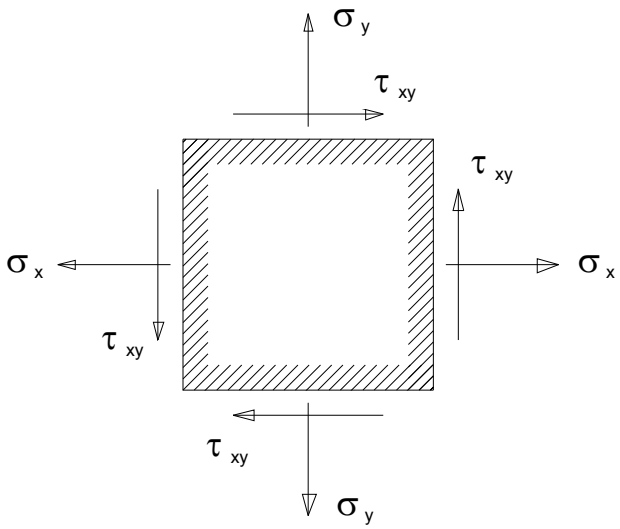
Las tensiones principales son:

$$\boxed{\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}}$$

Con las siguientes direcciones principales:

$$\boxed{tg(2\cdot\varphi)=\frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}}$$

Con el criterio de signos habitual, se consideran positivos los siguientes sentidos:

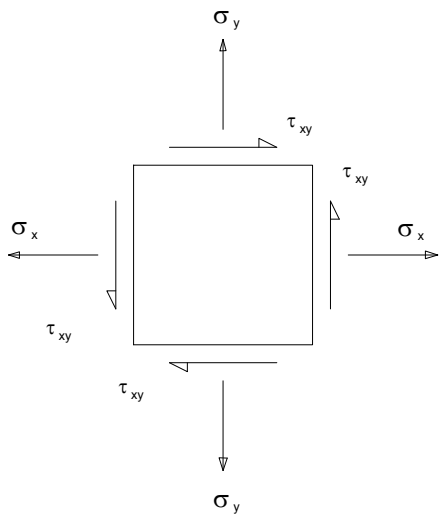


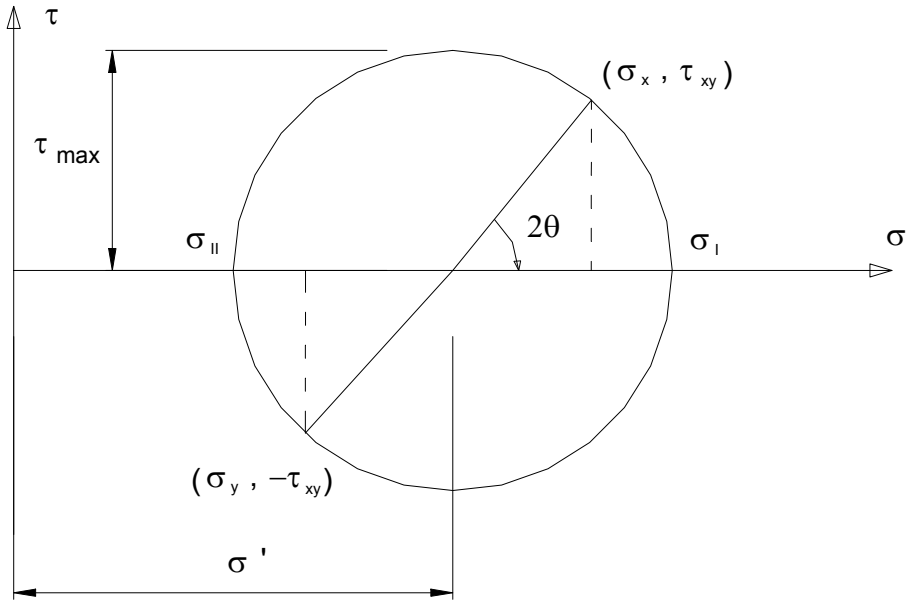
5.5- CÍRCULO DE MOHR

El círculo de Mohr representa el estado tensional en los puntos de un sólido de forma gráfica.

CENTRO: $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ ó $\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0\right)$

RADIO: $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$ ó $\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$



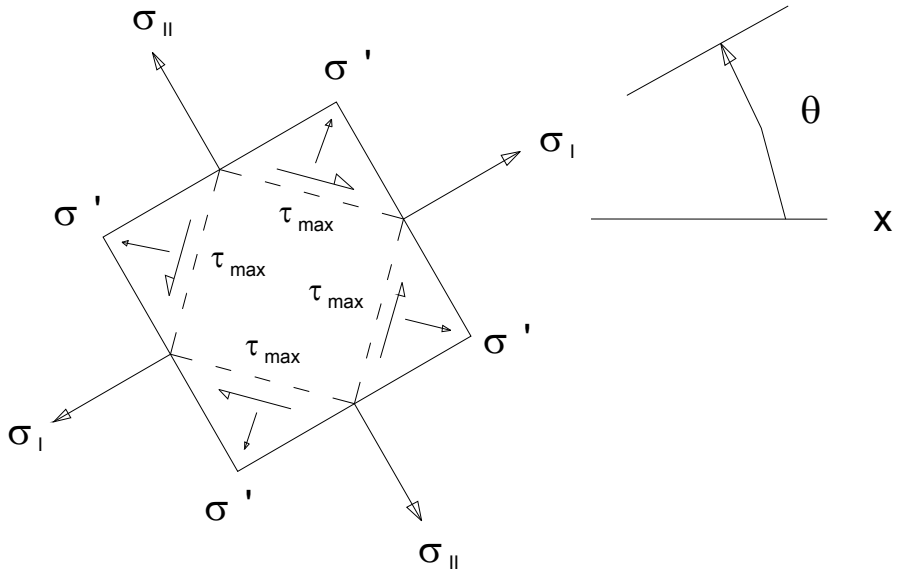


En el círculo de Mohr, los ángulos se duplican en magnitud y cambian su sentido de giro.

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_I - \sigma_{II}\right)}$$

Las direcciones con tensiones tangenciales máximas forman 45° con las principales.

$$\boxed{\gamma_{\max} = \varepsilon_I - \varepsilon_{II}}$$



5.6- REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Existen varias familias de curvas que se pueden representar en dos dimensiones:

Isostáticas:

Son las curvas envolventes de las tensiones principales. Indican las trayectorias que siguen los flujos de tensiones dentro de la pieza. Son tangentes en cada punto a las direcciones principales. Como hay dos familias de direcciones principales perpendiculares entre sí, hay también dos familias de curvas isostáticas ortogonales en cada punto. Su ecuación es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2 \cdot \tau_{xy}} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}}\right)^2}}$$

Isoclinas:

Son curvas que unen puntos donde las tensiones principales tienen una inclinación fija. Su ecuación es:

$$\boxed{tg(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = cte}$$

Isobaras:

Son el lugar geométrico de los puntos para los cuales una tensión principal tiene valor constante. Hay dos familias:

$$\boxed{\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} = cte}$$

Líneas de máxima tensión tangencial:

Son las curvas envolventes de las tensiones tangenciales máximas.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2}}$$

Líneas isocromáticas:

Son el lugar geométrico de los puntos donde $\sigma_I - \sigma_{II} = cte.$

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2 = cte}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = cte}$$

Isopacas:

A lo largo de ellas, la suma de tensiones principales es constante.

$$\boxed{\sigma_x + \sigma_y = cte}$$

Puntos singulares:

En ellos, las tensiones principales son iguales, tanto en valor como en signo. En un punto singular, todas sus direcciones son principales. El círculo de Mohr se reduce a un punto.

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}}$$

Puntos neutros:

Son los puntos singulares donde todas las componentes de la tensión son nulas.

$$\boxed{\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0}$$

Enunciado: (Práctica 3, CURSO 2000-2001) Tensplas

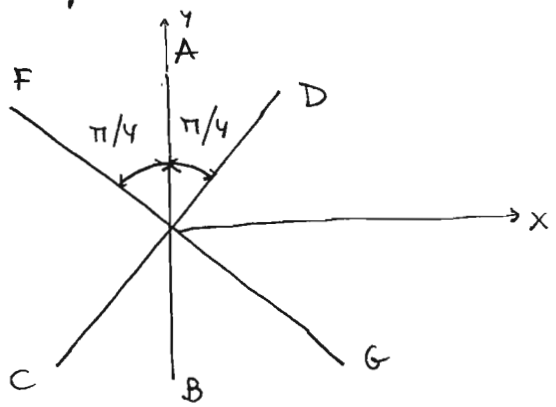
En un punto O de la superficie de una pieza sometida a un estado de tensión plana, se conocen los valores de las deformaciones según las direcciones señaladas en la figura como A-B, C-D y F-G, que son respectivamente:

$$\varepsilon_{AB} = (8 - 5\sqrt{3}) \cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_{CD} = 3 \cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_{FG} = 13 \cdot 10^{-4}$$

Las constantes elásticas del material valen $E = 2'4 \cdot 10^{6} \frac{N}{cm^2}$, $\nu = 0'20$.

Se pide:

1) Calcular los valores y direcciones de las deformaciones principales.
2) Dibujar un cuadrilátero elemental cuyos lados sean paralelos a las deformaciones principales, indicando su inclinación con respecto a la línea AB.
3) Calcular el valor —en N/cm^2— de la tensión tangencial máxima en O, así como el ángulo que forma con AB el plano en que actúa. Se dibujará un croquis con estos resultados, en el que se indicará claramente el signo de τ.



Resolución:

1) Deformaciones principales.

Para obtenerlas, lo primero es obtener el tensor de deformaciones.

$$\bar{n}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (8 - 5\sqrt{3}) \cdot 10^{-4} = -6'6025 \cdot 10^{-4}$$

$$\bar{n}_{CD} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\bar{n}_{FG} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = 1'3 \cdot 10^{-5}$$

Operando: $\varepsilon_y = -6'6025 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} = 3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \varepsilon_x + \gamma_{xy} = 1'26025 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\varepsilon_x}{2} - \frac{\varepsilon_y}{2} = 1'3 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \varepsilon_x = 6'8625 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \gamma_{xy} = 5'74 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{-0'2}{0'8}\left(6'8625 \cdot 10^{-4} - 6'6025 \cdot 10^{-4}\right) = -6'5 \cdot 10^{-6}$$

Por tanto:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 6'8625 \cdot 10^{-4} & 2'87 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 2'87 \cdot 10^{-4} & -6'6025 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -6'5 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

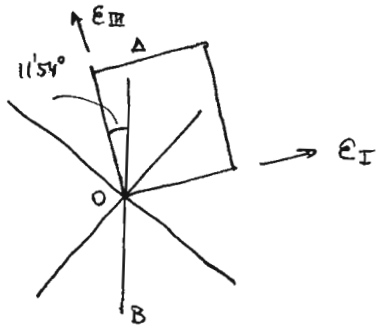
Resolviendo:

$$\left| \begin{array}{lll} \varepsilon_1 = 7'44871 \cdot 10^{-4} & \Rightarrow & \langle 0'9798,\ 0'2001,\ 0 \rangle \\ \varepsilon_2 = -6'5 \cdot 10^{-6} & \Rightarrow & \langle 0, 0, 1 \rangle \\ \varepsilon_3 = -7'18871 \cdot 10^{-4} & \Rightarrow & \langle -0'2001,\ 0'9798,\ 0 \rangle \end{array} \right.$$

2)

$\arccos(0'9798) = 11'54°$

$\arccos(0'2001) = 78'46°$



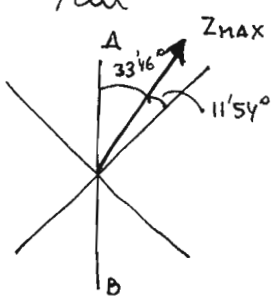
3) $\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$ Aplicando Lamé:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} = \frac{2'4 \cdot 10^6}{0'96}\begin{pmatrix} 1 & 0'2 \\ 0'2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6'8625 \cdot 10^{-4} \\ -6'6025 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1385'5 \\ -1307'5 \end{pmatrix} \frac{N}{cm^2}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{2'4 \cdot 10^6}{2'4} \cdot 5'74 \cdot 10^{-4} = 574 \frac{N}{cm^2}$$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1385'5 & 574 \\ 574 & -1307'5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{lll} \sigma_I = 1502'74 & \Rightarrow & \langle 0'9798,\ 0'2001 \rangle \\ \sigma_{II} = -1424'74 & \Rightarrow & \langle -0'2001,\ 0'9798 \rangle \end{array} \right.$$

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(1502'74 + 1424'74) = 1463'74\ N/cm^2$$



NOTA: Problema de tensión plana

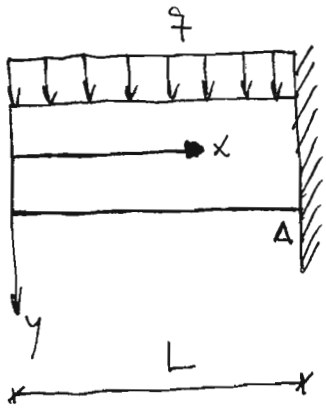
Enunciado (Práctica 4, curso 2000-2001) Tensplaz

La ménsula de la figura, de longitud L y sección rectangular de ancho b y canto h, está sometida a una carga repartida uniforme de intensidad q por unidad de longitud, en su cara superior. Admitiendo la hipótesis de que el estado tensional en cualquier punto es plano ($\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) y suponiendo que la distribución de tensiones longitudinales σ_x es la que propone la Resistencia de Materiales que, en el caso de la figura viene dada por:

$$\sigma_x = \frac{-M_z(x)\cdot y}{I_z}$$

con valores positivos en las fibras traccionadas y suponiendo que no existan fuerzas de masa. Se pide:

1) Obtener la expresión de las tensiones τ_{xy} y σ_y utilizando exclusivamente las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad.
2) Obtener el tensor de tensiones en cualquier punto de la sección en el empotramiento.
3) Obtener el valor de las tensiones principales en el punto A.
4) Comprobar si las tensiones obtenidas en el primer apartado pueden ser solución exacta de este problema elástico y justificar la respuesta.



Resolución:

1)

$$\sigma_x = \frac{-M_z(x)\cdot y}{I_z} = \frac{-M_z\cdot y}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{-12\,M_z\cdot y}{b\cdot h^3}$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \qquad (II)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \qquad (III)$$

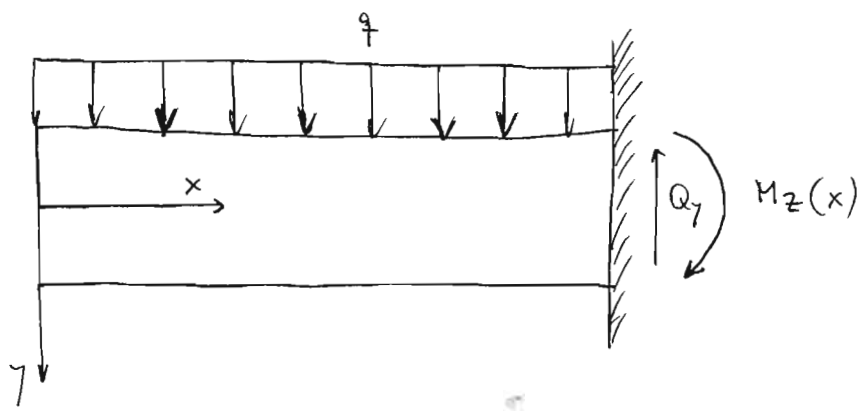
Sabemos: $\sigma_z = 0$ $\quad f_x = 0$ $\quad M_z = \frac{q \cdot x^2}{2}$

$\tau_{xz} = 0$ $\quad f_y = 0$

$\tau_{yz} = 0$ $\quad f_z = 0$

$$\sigma_x = \frac{-12\, M_z \cdot y}{b h^3} = \frac{-6\, q x^2 y}{b h^3}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{-12\, y}{b h^3} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial x} = \frac{-12\, y}{b h^3}\, Q_y(x) \qquad \left(\text{ya que } Q_y(x) = \frac{+\partial M_z}{\partial x}\right)$$



Sustituyendo:

$$\frac{-12\, y}{b h^3}\, Q_y(x) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (II)$$

$$0 = 0 \qquad \checkmark \qquad (III)$$

$$(\mathrm{I}): \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{12y}{bh^3} Q_y(x)$$

Integrando:

$$\tau_{xy} = \int \frac{12y}{bh^3} Q_y(x)\, dy = \frac{6y^2}{bh^3} Q_y(x) + c_1$$

Para obtener c_1 se sabe que $\tau_{xy}\left(y = \pm \frac{h}{2}\right) = 0$

$$\tau_{xy}\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0 = \frac{6 \cdot \frac{h^2}{4}}{bh^3} Q_y(x) + c_1 = \frac{3Q_y(x)}{2bh} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{-3Q_y(x)}{2bh}$$

Por tanto:

$$\boxed{\tau_{xy} = Q_y(x)\left[\frac{6y^2}{bh^3} - \frac{3}{2bh}\right] = \frac{3Q_y(x)}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right]} = \frac{3qx}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right]$$

$$(\mathrm{II}): \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{3}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right] \frac{\partial Q_y(x)}{\partial x} = \frac{3 \cdot q}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right]$$

Ya que $Q_y(x) = q \cdot x$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{3q}{2bh}\left[1 - \frac{4y^2}{h^2}\right]$$

Integrando:

$$\sigma_y = \frac{3q}{2bh}\left(y - \frac{4y^3}{3h^2}\right) + c_2$$

Sabemos $\sigma_y\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0$. Sustituyendo:

$$\sigma_y\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0 = \frac{3q}{2bh}\left(\frac{h}{2} - \frac{4\frac{h^3}{8}}{3h^2}\right) + c_2 = \frac{3q}{2bh}\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{6}\right) + c_2 = \frac{\cancel{3}q}{2b\cancel{h}}\frac{\cancel{h}}{\cancel{3}} + c_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{-q}{2b} \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = \frac{3q}{2bh}\left(y - \frac{4y^3}{3h^2}\right) - \frac{q}{2b}$$

$$\boxed{\sigma_y = \frac{3q}{2bh}\left[y - \frac{4y^3}{3h^2} - \frac{h}{3}\right]}$$

2) Tensor de tensiones en cualquier punto de la sección de empotramiento.

$$\sigma_x = \frac{-12\, M_z \cdot y}{b h^3} = \frac{-12 \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot y}{b h^3} = \frac{-6 q L^2 y}{b h^3}$$

$$M_z = \frac{q x^2}{2} \qquad M_z(x=L) = \frac{qL^2}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{3q}{2bh}\left[y - \frac{4y^3}{3h^2} - \frac{h}{3}\right]$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{3\, Q_y(x)}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right] = \frac{3qL}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right]$$

$$Q_y(x) = \frac{\partial M_z}{\partial x} = qx \qquad Q_y(x=L) = qL$$

Por tanto:

$$\boxed{\underline{T} = \begin{pmatrix} \frac{-6qL^2 y}{bh^3} & \frac{3qL}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right] \\ \frac{3qL}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right] & \frac{3q}{2bh}\left[y - \frac{4y^3}{3h^2} - \frac{h}{3}\right] \end{pmatrix}}$$

3) Tensiones principales en A $\left(x = L,\ y = \frac{h}{2},\ z = 0\right)$

Sustituyendo:

$$\sigma_x = \frac{-6qL^2 \cdot \frac{h}{2}}{bh^3} = \frac{-3qL^2}{bh^2}$$

$$\sigma_y = \frac{3q}{2bh}\left[\frac{h}{2} - \frac{4\frac{h^3}{8}}{3h^2} - \frac{h}{3}\right] = \frac{3q}{2bh}\left[\frac{h}{2} - \frac{h}{6} - \frac{h}{3}\right] = \frac{3q}{2bh} \cdot \left[\frac{3h - h - 2h}{6}\right] = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{3qL}{2bh}\left[\frac{4 \cdot \frac{h^2}{4}}{h^2} - 1\right] = \frac{3qL}{2bh}(1-1) = 0$$

El tensor de tensiones en A es:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \frac{-3qL^2}{6h^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y las tensiones principales son:

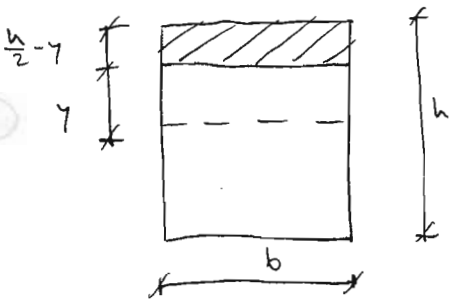
$$\boxed{\begin{array}{lll} \sigma_I = 0 & \Rightarrow & \langle 0, 1 \rangle \\ \sigma_{II} = \frac{-3qL^2}{6h^2} & \Rightarrow & \langle 1, 0 \rangle \end{array}}$$

4) Las expresiones de las tensiones coinciden con las propuestas por la Resistencia de Materiales:

$$\sigma_x\,(EL) \equiv \sigma_x\,(RM)$$

$\sigma_y\,(EL)$ No hay expresión equivalente en RM

$$\tau_{xy}\,(RM) = \frac{-Q_y \cdot S_y}{I \cdot b} = \frac{3Q_y(x)}{2bh}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right] \equiv \tau_{xy}\,(EL)$$



$$I = \frac{1}{12} bh^3$$

$$S_y = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y\right) = \frac{b}{8}\left(h^2 - 4y^2\right)$$

En $y = \frac{-h}{2} \Rightarrow \sigma_y = \frac{3q}{2bh}\left[-\frac{h}{2} - \frac{4 \cdot \frac{-h^3}{8}}{3h^2} - \frac{h}{3}\right] = \frac{3q}{2bh}\left[-\frac{h}{2} + \frac{h}{6} - \frac{h}{3}\right] = \frac{-q}{b}$ ✓

Para ver si son solución exacta del problema elástico, deberían cumplir las ecuaciones de compatibilidad:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right] = \frac{1}{E}\left[\frac{-6qx^2y}{bh^3} - \frac{\nu 3q}{2bh}\left(y - \frac{4y^3}{3h^2} - \frac{h}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\frac{-6qx^2y}{bh^3} - \frac{3qy\nu}{2bh} + \frac{2qy^3\nu}{bh^3} + \frac{\nu q}{2b}\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[-\nu\cdot\sigma_x + \sigma_y\right] = \frac{1}{E}\left[\frac{-6qx^2y\nu}{bh^3} + \frac{3qy}{2bh} - \frac{2qy^3}{bh^3} - \frac{q}{2b}\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right] = \frac{1}{E}\left[\frac{-6qx^2y\nu}{bh^3} - \frac{3qy\nu}{2bh} + \frac{2qy^3\nu}{bh^3} + \frac{q\nu}{2b}\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{3qx}{2bhG}\left[\frac{4y^2}{h^2} - 1\right]$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

Aplicando las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \Rightarrow \frac{12qy\nu}{Ebh^3} - \frac{12qy\nu}{Ebh^3} \neq \frac{12qy}{bh^3G}$$

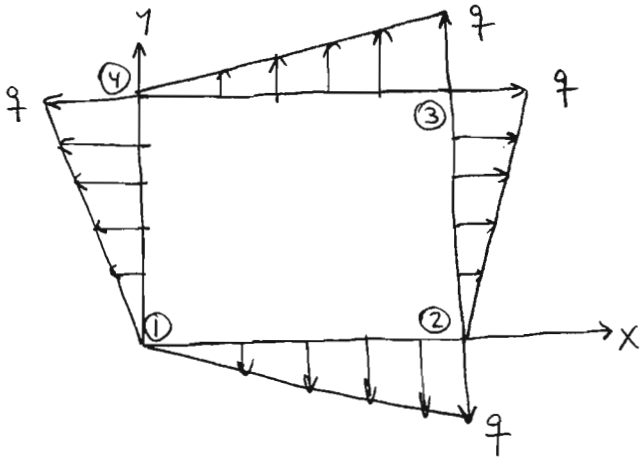
Por tanto, las expresiones obtenidas en el primer apartado no son solución exacta del problema elástico planteado.

NOTA: Problema para utilizar ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones.

Enunciado: (Práctica 6, CURSO 2000-2001) Tenspla 3

Una placa cuadrada de 20 mm. de lado está solicitada por una distribución lineal de cargas en sus bordes, tal y como puede verse en la figura, y con: $q = 120\ N/mm^2$. Se pide:

1) Calcular y representar la distribución de tensiones normales y tangenciales sobre las dos diagonales, dibujando cuatro croquis
2) Dibujar las isostáticas, señalando con trazo continuo la familia correspondiente a σ_1 y con discontinuo la correspondiente a σ_2. Se deberán razonar los esquemas.
3) Calcular los puntos singulares.



Resolución:

1) Al ser una placa con cargas en su plano estamos en tensión plana

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

- CONTORNO 1-2: $\left| \begin{array}{l} y = 0 \\ \bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6x \end{pmatrix} \end{array} \right.$

$$\bar{t}_{12} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{12} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6x \end{pmatrix}$$

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \sigma_y = 6x$$

• CONTORNO 2-3 : $\left| \begin{array}{l} \bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{t} = 6y \end{array} \right.$

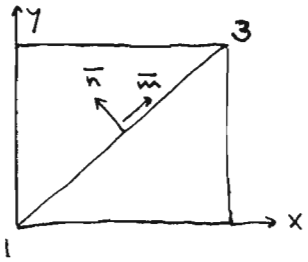
$$\bar{t}_{23} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{23} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x = 6y$$

Por tanto, el tensor de tensiones en la chapa es:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 6y & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix}$$

Ahora hay que ver lo que pasa en las diagonales.

• DIAGONAL 1-3 :



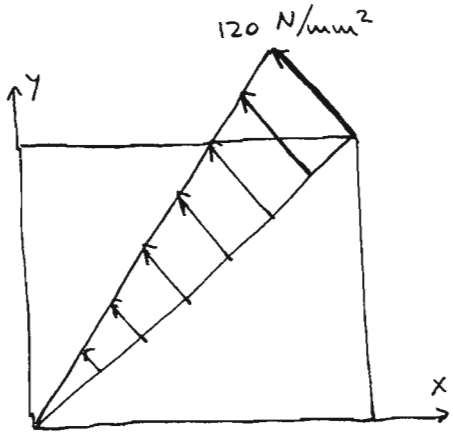
$$\bar{n}_{13} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$x = y$

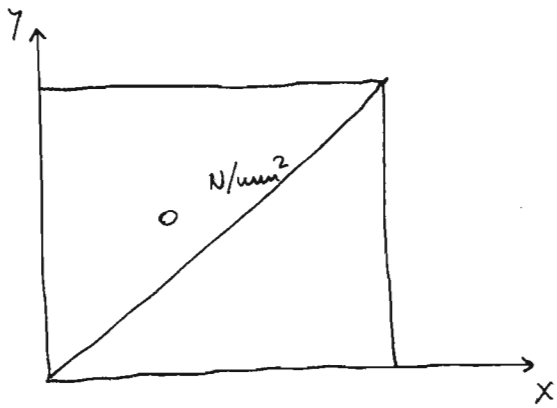
$$\bar{t}_{13} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{13} = \begin{pmatrix} 6y & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y\sqrt{2} \\ 3x\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}_{13}^T \cdot \bar{t}_{13} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3y\sqrt{2} \\ 3x\sqrt{2} \end{pmatrix} = 3y + 3x = 3x + 3y = 6x$$

$$\tau = \bar{m}^T \cdot \bar{t} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3y\sqrt{2} \\ 3x\sqrt{2} \end{pmatrix} = -3y + 3x = 3x - 3y = 0$$

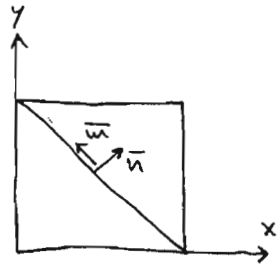


TENSIONES NORMALES



TENSIONES TANGENCIALES

• DIAGONAL 2-4 :



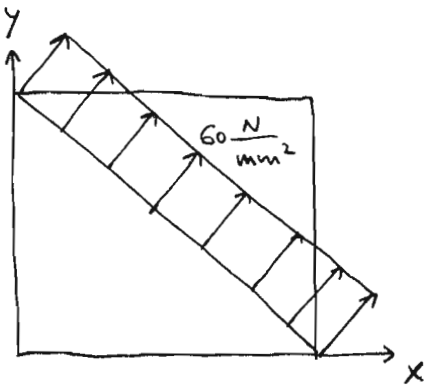
$$y = -x + 20$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

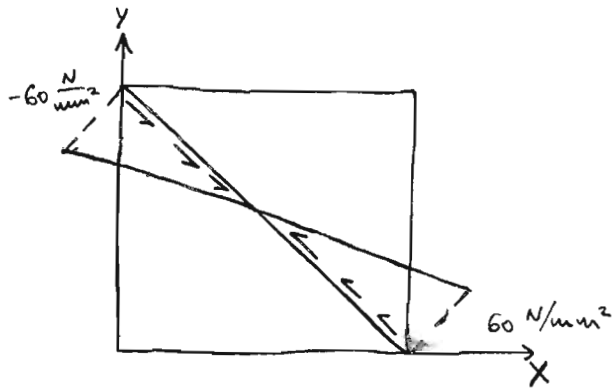
$$\bar{t}_{24} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 6y & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y\sqrt{2} \\ 3x\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3y\sqrt{2} \\ 3x\sqrt{2} \end{pmatrix} = 3x + 3y = 3x - 3x + 60 = 60$$

$$\tau = \bar{m}^T \cdot \bar{t} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3y\sqrt{2} \\ 3x\sqrt{2} \end{pmatrix} = -3y + 3x = 3x - 60 + 3x = 6x - 60$$



TENSIONES NORMALES

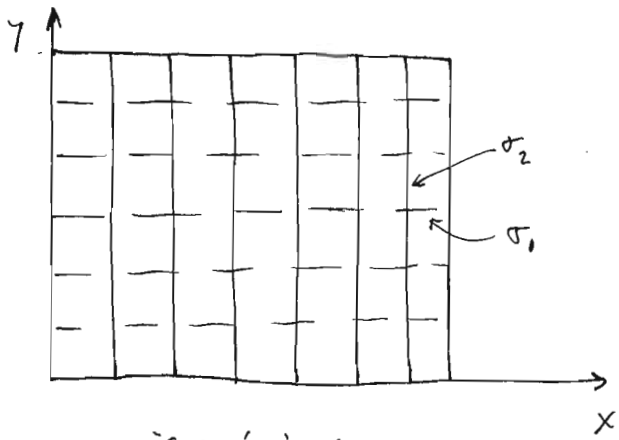


TENSIONES TANGENCIALES

2) Isostáticas. La ecuación es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2} = \infty \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow x = cte$$

Y sus perpendiculares. El dibujo es:

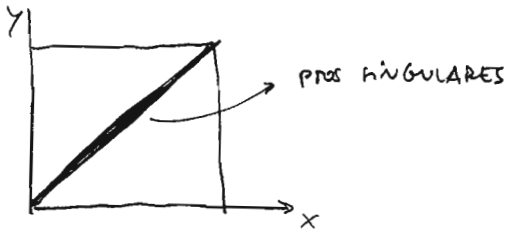


ISOSTÁTICAS

3) Puntos singulares: $\left| \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = 6y \\ \sigma_y = 6x \end{array} \right| \; 6x = 6y \Rightarrow x = y$$

Por tanto, todos los puntos de la diagonal ①-③ son singulares.



NOTA: Problema de tensión plana.

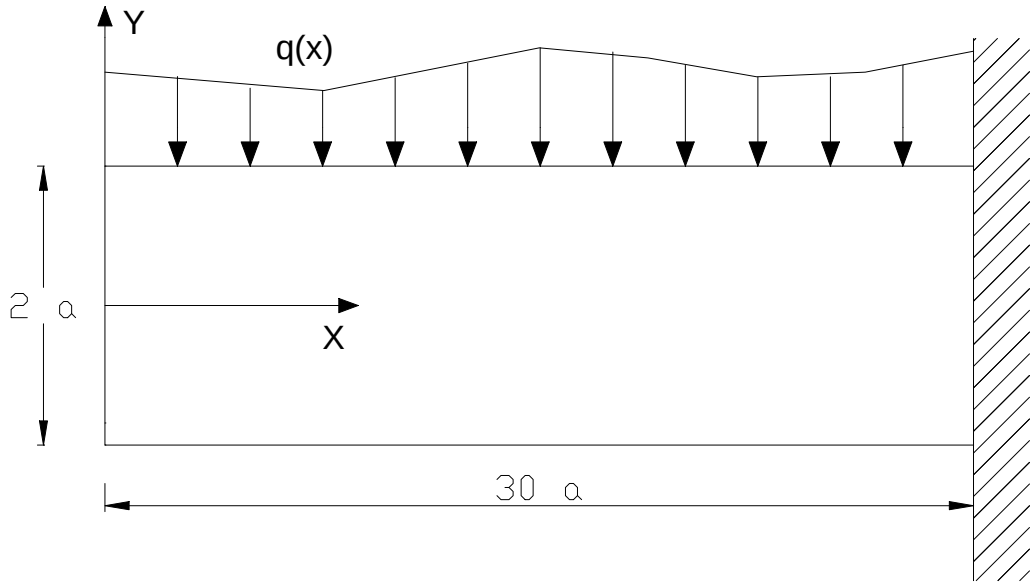
Tenspla 4.

La laja en ménsula de la figura es de sección rectangular de ancho unidad. El material es hookiano de características $E = 3 \cdot 10^4$ MPa y $\nu = 0.30$. La ménsula está únicamente sometida a la acción de ciertas cargas exteriores q(x) (fuerza por unidad de superficie) en su cara superior, normales a dicha cara. Mediante la teoría de vigas de Resistencia de Materiales se obtiene que la componente de la tensión σ_x se distribuye en el interior de la laja de acuerdo con la expresión analítica: $\sigma_x = A \cdot x^3 \cdot y$ (MPa) referida a los ejes de la figura. Se pide:

1. Determinar el valor del momento en el empotramiento.

2. Mediante las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad, obtener las expresiones analíticas de las demás componentes de tensión σ_y y τ_{xy}, así como la carga exterior q(x).

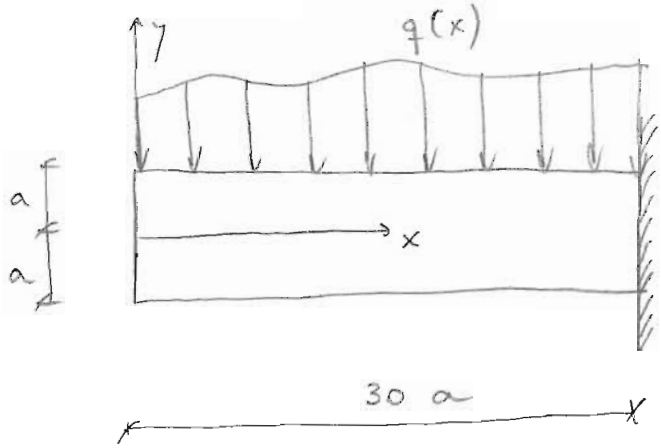
3. Comprobar si los resultados anteriores son solución exacta del problema elástico.



Enunciado: Tensple4 (40')

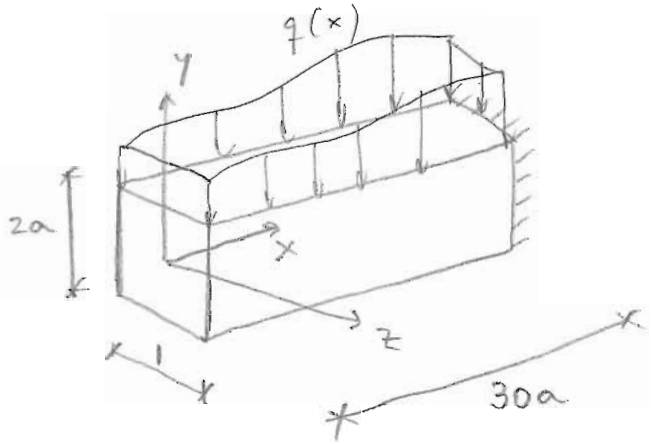
La laja en ménsula de la figura es de sección rectangular de ancho unidad. El material es hookiano de características $E = 3 \cdot 10^4$ MPa y $\nu = 0'30$. La ménsula está únicamente sometida a la acción de ciertas cargas exteriores $q(x)$ (fuerza por unidad de superficie) en su cara superior, normales a dicha cara. Mediante la teoría de vigas de Resistencia de Materiales se obtiene que la componente de la tensión σ_x se distribuye en el interior de la laja de acuerdo con la expresión analítica $\sigma_x = A \cdot x^3 \cdot y$ (MPa) referida a los ejes de la figura. Se pide:

1) Determinar el valor del momento en el empotramiento.
2) Mediante las ecuaciones de equilibrio de la Elasticidad, obtener las expresiones analíticas de las demás componentes de tensión σ_y y τ_{xy}, así como la carga exterior $q(x)$.
3) Comprobar si los resultados anteriores son solución exacta del problema elástico.



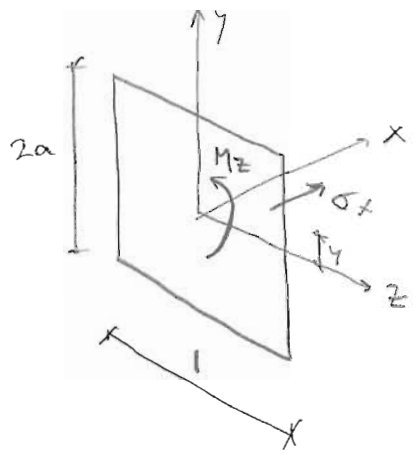
Resolución:

1) Momento en el empotramiento.



Al estar en tensión plana: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

En el empotramiento: $\sigma_x \Big|_{x=30a} = A \cdot (30a)^3 \cdot y = 27000 \cdot A a^3 y$



$$M_z = -\iint_\Omega \sigma_x \cdot y \, d\Omega$$

$$\boxed{M_z = -\int_{-0'5}^{0'5} \int_{-a}^{a} 27000 A \cdot a^3 \cdot y^2 \, dz \, dy = -27000 A a^3 \frac{y^3}{3}\Big|_{-a}^{a} = -18000 A \cdot a^6}$$

2) Ecuaciones de equilibrio:

(I) $\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \rightarrow 3Ax^2 y + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$

$\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -3Ax^2 y \rightarrow \tau_{xy} = -\frac{3}{2} A x^2 y^2 + g(x)$

Condiciones de contorno:

$\tau_{xy}\Big|_{x=0} = 0 \rightarrow g(0) = 0$

$\tau_{xy}\Big|_{y=a} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2} A x^2 a^2 + g(x) = 0 \rightarrow g(x) = \frac{3}{2} A x^2 a^2$

y por tanto:

$$\boxed{\tau_{xy} = -\frac{3}{2} A x^2 y^2 + \frac{3}{2} A x^2 a^2 = \frac{3}{2} A x^2 (a^2 - y^2)}$$

(II) $\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -3Ax(a^2 - y^2)$

$\sigma_y = \int -3Ax(a^2 - y^2) \, dy = -3Axa^2 y + Axy^3 + h(x)$

Condiciones de contorno: $\sigma_y\Big|_{y=-a} = 0$

Sustituyendo:

$$-3A\cdot x\,a^2(-a) + Ax\,(-a^3) + h(x) = 0$$

$$h(x) = -3Axa^3 + Axa^3 = -2Axa^3$$

$$\sigma_y = -3Axa^2y + Axy^3 - 2Axa^3$$

$$\boxed{\sigma_y = Ax\left[y^3 - 2a^3 - 3a^2y\right]}$$

Además, se sabe:

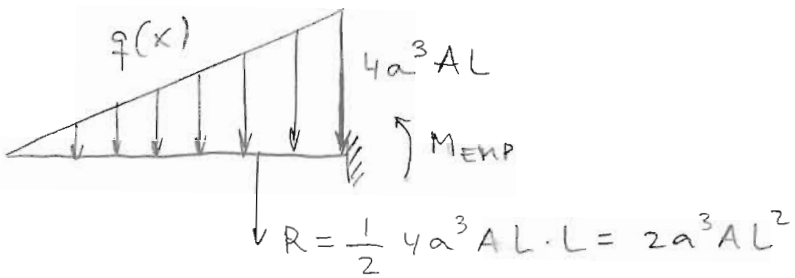
$$\sigma_y\Big|_{y=a} = -q(x) \Rightarrow Ax\left[a^3 - 2a^3 - 3a^3\right] = -q(x)$$

$$\boxed{q(x) = 4Aa^3x}$$

Se puede comprobar el resto de condiciones de contorno:

$$\tau_{xy}\Big|_{y=a} = 0 \longrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

y también se puede comprobar el momento en el empotram.



$$M_{EMP} = -2a^3AL^2\cdot\frac{L}{3} = -18000\cdot A\cdot a^6 \checkmark$$

3) Para que sea solución del problema elástico debe cumplir:

- Ecuaciones de equilibrio ✓
- Compatibilidad de deformaciones
- Condiciones de contorno ✓

Por lo tanto, sólo falta comprobar la compatibilidad. Lo primero es obtener las deformaciones en función de las tensiones.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) = \frac{1}{E}\left[Ax^3y - \nu Axy^3 + 2ax\nu a^3 + 3Ax\nu a^2 y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) = \frac{1}{E}\left[Axy^3 - 2Axa^3 - 3Axa^2y - \nu Ax^3y\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{3}{2G}Ax^2\left(a^2 - y^2\right) \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 11538'46 \text{ MPa}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\text{T izq}: -\frac{\nu}{E}Ax\cdot 6\cdot y - \frac{\nu}{E}A\cdot 6x\cdot y = \frac{-12\nu}{E}Axy = -1'2\cdot 10^{-4}Axy$$

$$\text{T. dch}: \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{-3}{2G}A\,4xy = \frac{-6}{G}Axy = -5'2\cdot 10^{-4}Axy$$

Por lo tanto, no es solución exacta del problema elástico.

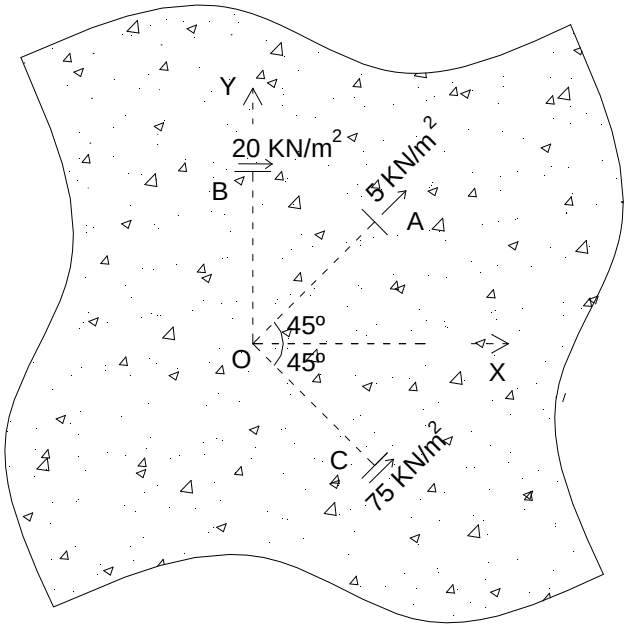
NOTA: Problema de tensión plana.

Tenspla 5.

El sólido delgado de la figura está sometido a un estado de tensión plana constante, del que se conocen tres datos anotados en la figura: la tensión normal sobre el plano señalado en A, y las tensiones tangenciales sobre los planos señalados en B y en C. Las características elásticas del material son $E = 2 \cdot 10^8$ kN/m^2, $\nu = 0.40$. Se pide:

1. Determinar las deformaciones principales y sus direcciones.
2. Calcular el alargamiento del segmento OC, siendo C(5,-5).
3. Calcular la variación del ángulo COA.

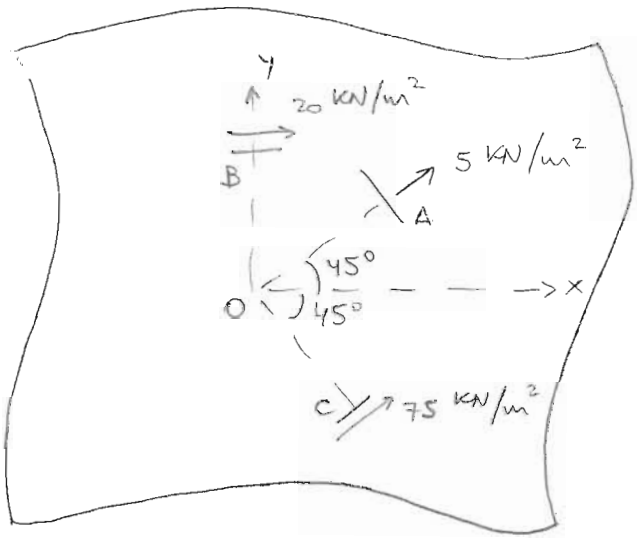
(Examen de mayo de 2002)



Enunciado: Tensión 5 [EXAMEN MAYO 2002] (30')

El sólido elástico de la figura está sometido a un estado de tensión plana constante, del que se conocen tres datos anotados en la figura. La tensión normal sobre el plano señalado en A, y las tensiones tangenciales sobre los planos señalados en B y en C. Las características elásticas del material son $E = 2 \cdot 10^8$ KN/m², $\nu = 0'4$. Se pide:

1) Determinar las deformaciones principales y sus direcciones.
2) Calcular el alargamiento del segmento OC, siendo C (5,-5).
3) Calcular la variación del ángulo COA.



Resolución:

1) Estamos en un caso de tensión plana constante.

PLANO A $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2}/2 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

$$\sigma = 5 = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = 0'5\,\sigma_x + 0'5\,\sigma_y + \tau_{xy}$$

$$\sigma_x + \sigma_y + 2\tau_{xy} = 10 \quad (I)$$

PLANO B $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\tau} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{n}_{\boxdot} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\tau = 20 = \bar{n}_{\boxdot}^T \cdot \bar{t} = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ KN/m}^2 \quad (II)$$

$\boxed{\text{PLANO C}}$ $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \bar{\tau} = \begin{bmatrix} 75\sqrt{2}/2 \\ 75\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \bar{n}_b = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.

$$\tau = 75 = \bar{n}_b^T \cdot \bar{t} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = 0'5 \cdot \sigma_x - 0'5 \cdot \sigma_y$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 150 \quad (\text{III})$$

Resolviendo:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_x = 60 \ KN/m^2 \\ \sigma_y = -90 \ KN/m^2 \\ \tau_{xy} = 20 \ KN/m^2 \end{array} \right. \rightarrow \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 20 & -90 \end{bmatrix} \frac{KN}{m^2}$$

Para obtener las deformaciones, aplico Hooke:

$$E = 2 \cdot 10^8 \ \frac{KN}{m^2} \qquad \nu = 0'40 \qquad G = 71428571 \ KN/m^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu \sigma_y\right] = 4'8 \cdot 10^{-7} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu \sigma_x\right] = -5'7 \cdot 10^{-7} \\ \varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y\right] = 6 \cdot 10^{-8} \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2'8 \cdot 10^{-8} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

El tensor de deformaciones es $\quad \underline{D} = \begin{bmatrix} 4'8 \cdot 10^{-7} & 1'4 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 1'4 \cdot 10^{-8} & -5'7 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$

Las deformaciones principales y sus direcciones serán:

$$\varepsilon_I = 4'802 \cdot 10^{-7} \longrightarrow \bar{e}_I^T = [1, 0'0133, 0]$$

$$\varepsilon_{II} = 6 \cdot 10^{-8} \longrightarrow \bar{e}_{II}^T = [0, 0, 1]$$

$$\varepsilon_{III} = -5'702 \cdot 10^{-7} \longrightarrow \bar{e}_{III}^T = [-0'0133, 1, 0]$$

2) Alargamiento del segmento OC: $O(0,0)$ $C(5,-5)$

$$\overline{OC} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{d}_{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\varepsilon}_{OC} = \underline{D} \cdot \overline{d}_{OC} = \begin{pmatrix} 4'8 \cdot 10^{-7} & 1'4 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 1'4 \cdot 10^{-8} & -5'7 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3'295 \cdot 10^{-7} \\ 4'130 \cdot 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{OC} = \overline{d}_{OC}^{T} \cdot \overline{\varepsilon}_{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, -1, 0] \begin{bmatrix} 3'295 \cdot 10^{-7} \\ 4'130 \cdot 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix} = -5'901 \cdot 10^{-8}$$

Y el alargamiento del segmento será:

$$\boxed{\Delta L = \int_L \varepsilon_L \cdot dL = -5'901 \cdot 10^{-8} \cdot L = -5'901 \cdot 10^{-8} \cdot 5\sqrt{2} = -4'173 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

3) Variación del ángulo COA.

$$\gamma_{OA,OC} = 2 \cdot \overline{d}_{OA}^{T} \cdot \underline{D} \cdot \overline{d}_{OC}$$

$$\overline{d}_{OA} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{d}_{OC} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\boxed{\gamma_{OA,OC}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0] \begin{pmatrix} 4'8 \cdot 10^{-7} & 1'4 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 1'4 \cdot 10^{-8} & -5'7 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= [1, 1, 0] \begin{bmatrix} 4'66 \cdot 10^{-7} \\ 5'84 \cdot 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{1'05 \cdot 10^{-6} \text{ rad}}$$ Acortamiento

NOTA: Tensión plana

Tenspla 6.

Una chapa delgada está sometida a unas presiones oblicuas en los contornos, en su propio plano XY, como se muestra en la figura. Los lados de la chapa son iguales de longitud L metros. El espesor de la chapa es muy pequeño. Se pide:

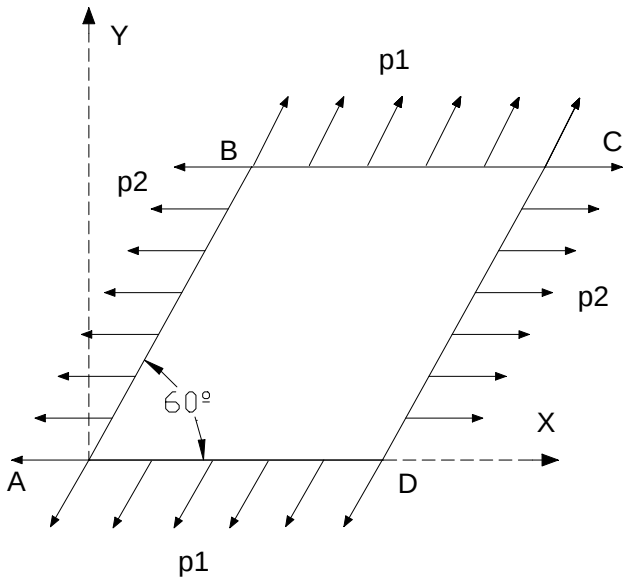
1. Obtener el valor de p_2 para que en todos los puntos el estado de tensiones sea uniforme.

2. En lo sucesivo se toma $p_2 = p_1/2$ (kN/m^2). Entre todos los planos perpendiculares al de la chapa, encontrar aquéllos sobre los que actúan las máximas tensiones tangenciales, así como el valor de éstas.

3. Obtener el valor de la tensión tangencial máxima.

4. Si $E = 3 \cdot 10^5$ MPa y $\nu = 0.30$, hallar la deformación transversal máxima.

5. Obtener la variación de la longitud del lado CD, expresando sus unidades.



Enunciado. Tensplaó

Una chapa delgada está sometida a unas presiones oblicuas en los contornos, en su propio plano xy, como se muestra en la figura. Los lados de la chapa son iguales, de longitud L metros. El espesor de la chapa es muy pequeño. Se pide:

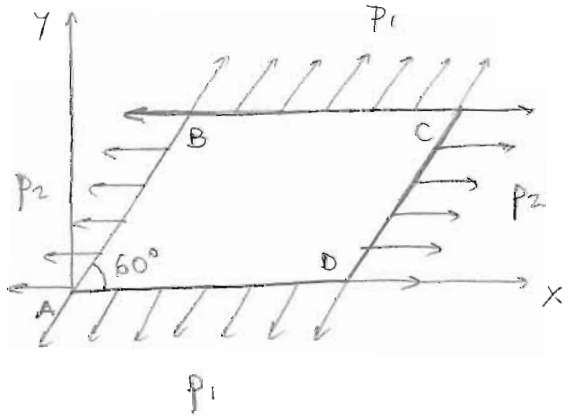
1) Obtener el valor de p_2 para que en todos los puntos el estado de tensiones sea uniforme

2) En lo sucesivo se toma $p_2 = \frac{p_1}{2}$. Entre todos los planos perpendiculares al de la chapa, encontrar aquéllos sobre los que actúan las máximas tensiones tangenciales, así como el valor de éstas.

3) Obtener el valor de la tensión tangencial máxima.

4) Si $E = 3 \cdot 10^5$ MPa y $\nu = 0'30$, hallar la deformación transversal máxima.

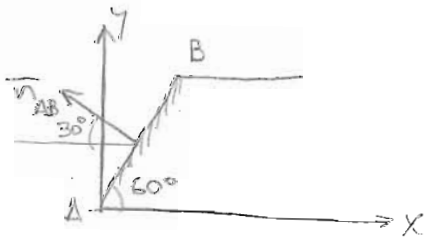
5) Obtener la variación de longitud del lado CD.



Resolución:

1) Al ser una chapa delgada solicitada por cargas contenidas en su plano, estamos ante un caso de tensión plana.
Como el estado de tensiones debe ser uniforme, eso significa que el tensor de tensiones debe ser igual en todos los puntos.
Sólo conocemos las presiones en los contornos, por lo que hay que aplicar las condiciones de contorno.

• LADO AB:



$$\bar{n}_{AB} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{AB} = \begin{bmatrix} -p_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

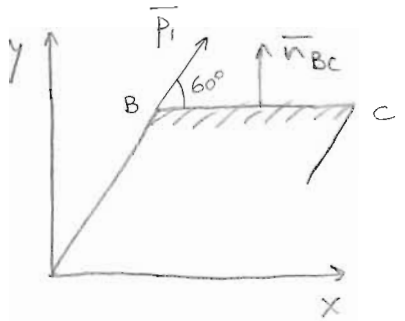
Aplicando Cauchy:

$$\bar{t}_{AB} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{AB} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$-p_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x + \frac{\tau_{xy}}{2} \Longrightarrow \sigma_x = \frac{2p_2 + \tau_{xy}}{\sqrt{3}}$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{xy} + \frac{\sigma_y}{2} \Longrightarrow \sigma_y = \sqrt{3} \cdot \tau_{xy}$$

- LADO BC



$$\bar{n}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{BC} = \begin{bmatrix} p_1/2 \\ \frac{p_1\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{BC} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{BC} \Longrightarrow \begin{pmatrix} p_1/2 \\ \frac{p_1\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p_2 + \tau_{xy}}{\sqrt{3}} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sqrt{3}\tau_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\tau_{xy} = \frac{p_1}{2}$$

$$\sigma_x = \frac{p_1 + 4p_2}{2\sqrt{3}}$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{3}}{2} p_1$$

Por lo tanto, da igual cual sea el valor de p_2, ya que el tensor de tensiones será siempre constante, sea cual sea el valor de p_2.

3) $p_2 = \frac{p_1}{2}$ El tensor de tensiones queda:

$$\underline{T} = \frac{p_1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

En 2D: $\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$

Por lo tanto, hay que hallar las tensiones principales.

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sqrt{3}\, p_1}{2} \pm \frac{p_1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_I = 1'366\, p_1 \\ \sigma_{II} = 0'366\, p_1 \end{array}\right| \longrightarrow \boxed{\tau_{MAX,\square} = \frac{p_1}{2}}$$

Y las direcciones principales son

$$tg(2\varphi) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot \frac{p_1}{2}}{0} = \infty \rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Las tensiones principales forman 45° con los ejes coordenados. Por lo tanto, las direcciones de τ_{MAX} forman 45° con las tensiones principales, y serán las siguientes:

$$\boxed{\bar{n}^1_{\tau_{MAX}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{n}^2_{\tau_{MAX}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

3) Las tensiones principales son:

$$\left|\begin{array}{ll} \sigma_I = 1'366\, p_1 & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0] \\ \sigma_{II} = 0'366\, p_1 & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0] \\ \sigma_{III} = 0 & \rightarrow [0,0,1] \end{array}\right.$$

Por tanto: $\boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}[\sigma_I - \sigma_{III}] = \frac{1}{2} p_1 (1'366 - 0) = 0'683\, p_1}$

$$\boxed{\bar{n}_{\tau_{MAX}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{n}_I \pm \bar{n}_{III}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

4) $\gamma_{MAX} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III}$. Hay que obtener el tensor de deformaciones.

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = 2'021 \cdot 10^{-6}\, p_1 \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 2'021 \cdot 10^{-6}\, p_1 \\ \varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -1'732 \cdot 10^{-6}\, p_1 \end{array}\right. \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 4'333 \cdot 10^{-6}\, p_1$$

y el tensor de deformaciones es:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} = p_1 \cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} 2'021 & 2'167 & 0 \\ 2'167 & 2'021 & 0 \\ 0 & 0 & -1'732 \end{pmatrix}$$

Las deformaciones principales son:

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_I = 4'188 \cdot 10^{-6}\, p_1 \\ \varepsilon_{II} = -1'46\ 10^{-7}\, p_1 \\ \varepsilon_{III} = -1'732 \cdot 10^{-6}\, p_1 \end{array} \right.$$

Por tanto

$$\boxed{\gamma_{max} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III} = 5'92 \cdot 10^{-6}\, p_1}$$

5) Variación de longitud del lado CD

$$\Delta l_{CD} = \int_C^D \varepsilon_{CD} \cdot dl_{CD} \qquad \bar{d}_{CD} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{CD} = \bar{d}_{CD}^T \cdot \underline{D}^{CD} \cdot \bar{d}_{CD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 2'021 & 2'167 & 0 \\ 2'167 & 2'021 & 0 \\ 0 & 0 & -1'732 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} p_1 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{CD} = 3'898 \cdot 10^{-6}\, p_1$$

Sustituyendo este valor:

$$\boxed{\Delta l_{CD}} = \int_C^D 3'898\ 10^{-6}\, p_1\ dl_{CD} = \boxed{3'898 \cdot 10^{-6}\, p_1 \cdot L}$$

NOTA: Tensión plana

Tenspla 7.

La viga de luz L (m) de la figura es de sección constante rectangular de ancho muy pequeño b (m) respecto del canto h (m). Esta viga se encuentra sometida a flexión pura mediante la acción de sendos momentos opuestos de valor M (kN·m) en sus extremos. El módulo de elasticidad del material es $3 \cdot 10^4$ MPa y el coeficiente de Poisson es 0.30.

Se supone que el siguiente campo de desplazamientos es la solución del problema elástico anterior:

$$u = A_0 \cdot x \cdot y; \qquad v = B_0 \cdot x^2 + B_1 \cdot y^2 + B_2 \cdot z^2; \qquad w = C_0 \cdot y \cdot z$$

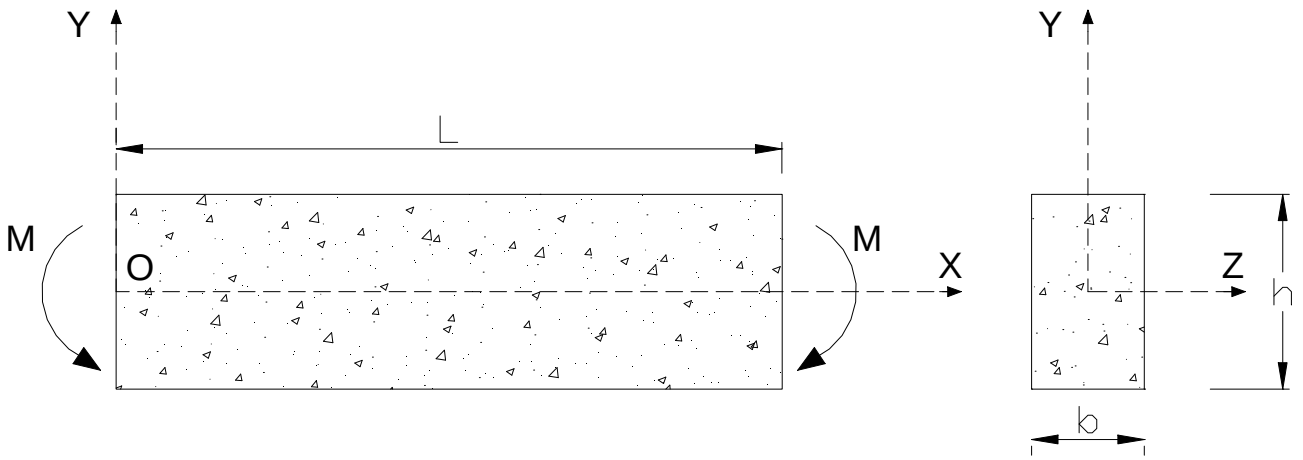
en donde (u, v, w) son las componentes del vector desplazamiento sobre los ejes coordenados indicados y A_0, B_0, B_1, B_2 y C_0 constantes. Se pide:

1. Determinar los valores de las constantes.

2. Mostrar si dentro del campo de movimientos está incluido el movimiento de sólido rígido de la viga $u_0 = u_0$ (x, y, z); $v_0 = v_0$ (x, y, z); $w_0 = w_0$ (x, y, z). En caso negativo, determinar la forma más general de este movimiento de sólido rígido, interpretando sus términos.

3. Tensiones en el punto x = L/2; y = h/4; z = b/4.

(Examen de septiembre de 1997 y de abril de 2002)



Enunciado: EXAMEN SEPTIEMBRE 97 Y ABRIL 02 Tema 7 (60')

La viga de luz L (m) de la figura es de sección constante rectangular de ancho muy pequeño b(m) respecto del canto h(m). Esta viga se encuentra sometida a flexión pura mediante la acción de sendos momentos opuestos de valor M (KN·m) en sus extremos. El módulo de elasticidad del material es $3 \cdot 10^4$ MPa y el coeficiente de Poisson 0'30. Se supone que el siguiente campo de desplazamientos es la solución del problema elástico anterior.

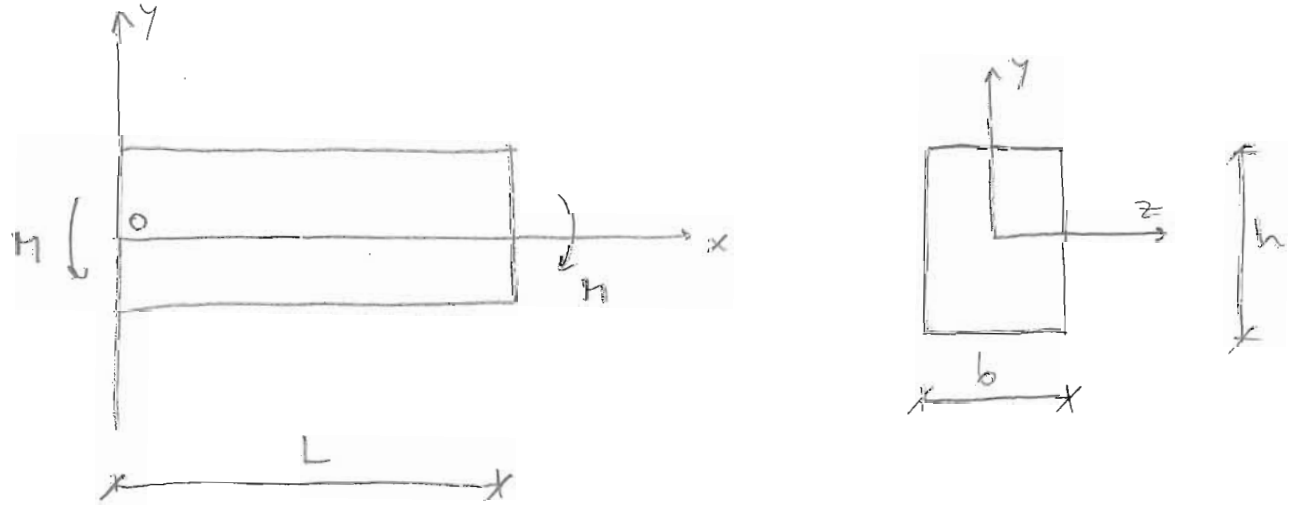
$$u = A_0 \cdot x \cdot y \qquad v = B_0 \cdot x^2 + B_1 \cdot y^2 + B_2 \cdot z^2 \qquad w = C_0 \cdot y \cdot z$$

en donde (u, v, w) son las componentes del vector desplazamientos sobre los ejes coordenados indicados y A_0, B_0, B_1, B_2 y C_0 constantes. Se pide:

1) Determinar los valores de las constantes.

2) Mostrar si dentro del campo de movimientos está incluido el movimiento de sólido rígido de la viga $u = u_0(x, y, z)$, $v = v_0(x, y, z)$, $w = w_0(x, y, z)$. En caso negativo, determinar la forma más general de este movimiento de sólido rígido, interpretando sus términos

3) Tensiones en el punto $x = \frac{L}{2}$, $y = \frac{h}{4}$, $z = \frac{b}{4}$



Resolución:

1) Al ser el ancho muy pequeño en comparación con las otras dos dimensiones, y estar las cargas contenidas en el plano medio, estamos en un caso de tensión plana. Sin embargo, en el examen dicen por los altavoces que no se trate el problema como un caso de tensión plana.

De cualquier manera, para que el campo de movimientos sea solución del problema elástico deben cumplirse las siguientes condiciones:

- Ecuaciones de equilibrio interno.
- Compatibilidad (obvio, por proceder de campo movs.)
- Condiciones de contorno del problema.

El proceso es:

$$\text{Movimientos} \rightarrow \text{Deformaciones} \xrightarrow{\text{Lamé}} \text{Tensiones}$$

Las deformaciones son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = A_0 \cdot y \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = x\,(A_0 + 2B_0)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \cdot B_1 \cdot y \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = C_0 \cdot y \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = z\,(2B_2 + C_0)$$

y las tensiones, aplicando Lamé:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = y\,(A_0 + 2B_1 + C_0)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0'577\,E \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 0'385\,E \end{aligned}\right\} \quad G = \frac{2}{3}\lambda$$

$$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x = \lambda \cdot y \left[\frac{7}{3} A_0 + 2B_1 + C_0\right]$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y = \lambda \cdot y \left[A_0 + \frac{14 B_1}{3} + C_0\right]$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z = \lambda \cdot y \left[A_0 + 2B_1 + \frac{7 C_0}{3}\right]$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{2}{3} \lambda \cdot x \left[A_0 + 2B_0\right]$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = \frac{2}{3} \lambda \cdot z \left[2B_2 + C_0\right]$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \cancel{f_x}^{\,0} = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = 0 \ \checkmark$$

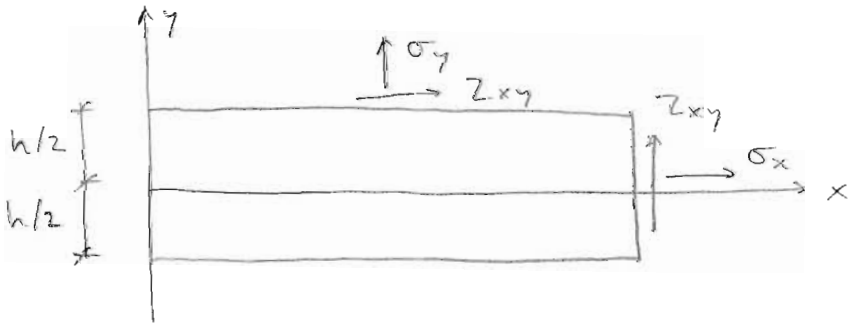
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \cancel{f_y}^{\,0} = 0$$

$$\frac{2}{3}\lambda\left(A_0 + 2B_0\right) + \lambda\left(A_0 + \frac{14B_1}{3} + C_0\right) + \frac{2}{3}\lambda\left(2B_2 + C_0\right) = 0$$

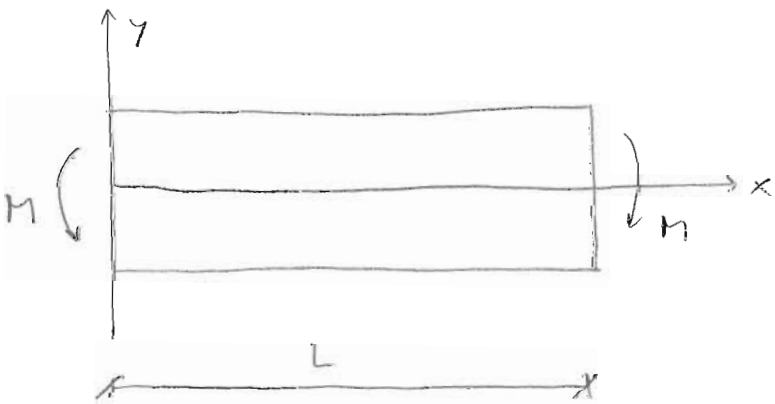
$$\boxed{5A_0 + 4B_0 + 14B_1 + 4B_2 + 5C_0 = 0} \quad (\mathrm{I})$$

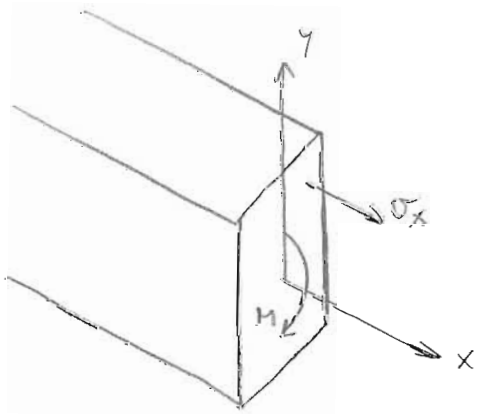
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \cancel{f_z}^{\,0} = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = 0 \ \checkmark$$

Ahora hay que aplicar las condiciones de contorno:



TENSIONES





ESFUERZOS

• CARA $y = \frac{h}{2}$:

$$\sigma_y = 0 \longrightarrow 0 = \lambda \cdot \frac{h}{2}\left[A_0 + \frac{14B_1}{3} + C_0\right] = 0 \longrightarrow \boxed{3A_0 + 14B_1 + 3C_0 = 0} \quad (\mathrm{II})$$

$$\tau_{xy} = 0 \longrightarrow 0 = \frac{2}{3}\lambda \cdot x\left[A_0 + 2B_0\right] = 0 \longrightarrow \boxed{A_0 = -2B_0} \quad (\mathrm{III})$$

$$\tau_{yz} = 0 \longrightarrow 0 = \frac{2}{3}\lambda \cdot z\left[2B_2 + C_0\right] = 0 \longrightarrow \boxed{C_0 = -2B_2} \quad (\mathrm{IV})$$

• CARA $z = \frac{b}{2}$:

$$\sigma_z = 0 \rightarrow \lambda \cdot y \cdot \left[A_0 + 2B_1 + \frac{7C_0}{3}\right] = 0 \rightarrow \boxed{3A_0 + 6B_1 + 7C_0 = 0} \quad (V)$$

$$\tau_{xz} = 0 \rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$\tau_{yz} = 0 \rightarrow \frac{2}{3}\lambda\frac{b}{2}\left(2B_2 + C_0\right) = 0 \rightarrow C_0 = -2B_2 \quad (\text{igual que IV})$$

Resolviendo el sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas se llega a $A_0 = B_0 = B_1 = B_2 = C_0 = 0$ lo que no puede ser, ya que obligaría a que todos los movimientos, tensiones y deformaciones sean nulos. Por lo tanto, hace falta una ecuación más.

• CARA $x = L$:

$$M_z = \iint_\Omega \sigma_x \cdot y \cdot d\Omega = \int_{y=-h/2}^{y=h/2} \int_{z=-\frac{b}{2}}^{z=\frac{b}{2}} \lambda \cdot y^2 \left[\frac{7}{3}A_0 + 2B_1 + C_0\right] dy\, dz =$$

$$= \lambda\left[\frac{7}{3}A_0 + 2B_1 + C_0\right] \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} y^2\, dy = \lambda \cdot b \cdot \left[\frac{7}{3}A_0 + 2B_1 + C_0\right] \frac{y^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} =$$

$$= \frac{\lambda}{12}\left[\frac{7}{3}A_0 + 2B_1 + C_0\right] b h^3 = M$$

Como $I = \frac{1}{12} b h^3 \rightarrow \boxed{\frac{M}{I} = \lambda\left[\frac{7}{3}A_0 + 2B_1 + C_0\right]} \quad (VI)$

Esta ecuación no se cumple con $A_0 = B_1 = C_0 = 0$

Tomando (III) y (IV) el sistema queda:

(I) $-3B_0 + 7B_1 - 3B_2 = 0$

(II) igual que (I)

(V) $-3B_0 + 3B_1 - 7B_2 = 0$

(VI) $\frac{M}{I} = \lambda\left[-\frac{14}{3}B_0 + 2B_1 - 2B_2\right]$

Resolviendo el sistema, se tiene:

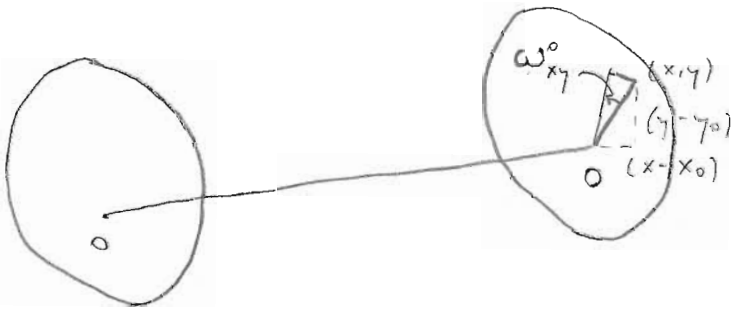
$$\boxed{A_0 = \frac{M}{EI} \qquad B_0 = \frac{-M}{2EI} \qquad B_1 = \frac{-0'15M}{EI} \qquad B_2 = \frac{0'15M}{EI} \qquad C_0 = \frac{-0'3M}{EI}}$$

Y se cumplen las seis ecuaciones.

2) Los movimientos que se producen en un sólido tienen las siguientes componentes:

- Una traslación de componentes $(u_0 \; v_0 \; w_0)$
- Una rotación de componentes $(\omega_{xy} \; \omega_{yz} \; \omega_{zx})$
- Deformaciones longitudinales $(\varepsilon_x \; \varepsilon_y \; \varepsilon_z)$
- Deformaciones tangenciales $(\gamma_{xy} \; \gamma_{yz} \; \gamma_{xz})$

Las dos primeras recogen los movimientos de sólido rígido.



$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] \qquad \omega_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right] \qquad \omega_{zx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

Por tanto, los movimientos de sólido rígido serán una suma de TRASLACIÓN + GIROS × BRAZOS.

MOVIMIENTOS DE SÓLIDO RÍGIDO

$$\begin{cases} u_{SR}(x,y,z) = u_0 - \omega^0_{xy} \cdot [y-y_0] + \omega^0_{zx}\,[z-z_0] \\ v_{SR}(x,y,z) = v_0 - \omega^0_{yz} \cdot [z-z_0] + \omega^0_{xy}\,[x-x_0] \\ w_{SR}(x,y,z) = w_0 - \omega^0_{zx}\,[x-x_0] + \omega^0_{yz}\,[y-y_0] \end{cases}$$

Siendo los valores $(u_0 \; v_0 \; w_0)$ los movimientos del centro de giro del sólido y los valores $[\omega^0_{xy} \; \omega^0_{yz} \; \omega^0_{zx}]$ las rotaciones del centro de giro.

Considerando las K valores constantes se tiene:

$$\left|\begin{array}{l} U_{SR}(x,y,z) = K_1 + K_2 \cdot y + K_3 \cdot z \\ V_{SR}(x,y,z) = K_1' + K_2' x + K_3' \cdot z \\ W_{SR}(x,y,z) = K_1'' + K_2'' \cdot x + K_3'' \cdot y \end{array}\right.$$

Por tanto, los movimientos como sólido rígido están definidos por términos lineales de x, y, z y éstos no aparecen en los valores de los movimientos dados en el enunciado. No están, por tanto, incluidos los movimientos como sólido rígido.

Se pueden comprobar los valores:

$$\varepsilon_x^{SR} = \frac{\partial U_{SR}}{\partial x} = 0 = \varepsilon_y^{SR} = \varepsilon_z^{SR}$$

$$\gamma_{xy}^{SR} = \frac{\partial V_{SR}}{\partial x} + \frac{\partial U_{SR}}{\partial y} = 0 = \gamma_{xz}^{SR} = \gamma_{yz}^{SR}$$

$$\omega_{xy}^{SR} = \omega_{xy}^{0} \quad ; \quad \omega_{yz}^{SR} = \omega_{yz}^{0} \quad \omega_{zx}^{SR} = \omega_{zx}^{0}$$

3) Tensiones en el punto $\left[\frac{L}{2}, \frac{h}{4}, \frac{b}{4}\right]$

Las tensiones en un punto cualquiera son

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_x = \lambda \cdot y \left(\frac{7}{3} A_0 + 2 B_1 + C_0\right) = \frac{yM}{I} \quad \text{(Como en Resistencia de Materiales)} \\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, el tensor de tensiones en un punto cualquiera es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{yM}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{TENSIÓN PLANA}$$

Y en el punto $P\left[\frac{L}{2}, \frac{h}{4}, \frac{b}{4}\right]$: $I = \frac{1}{12} b h^3$, $y = \frac{h}{4}$ $\Big|$ $\frac{y}{I} = \frac{3}{bh^2}$

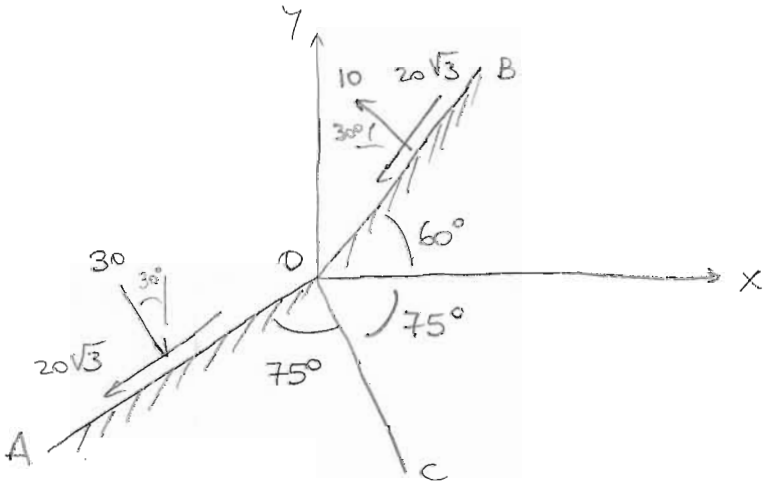
$$\underline{T}^P = \begin{bmatrix} \frac{3M}{bh^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: Problema de tensión plana.

Enunciado: Tensplan8 (25')

En un estado de tensión plana, las tensiones en el punto O según los planos OA y OB son las de la figura. Sus valores están expresados en KN/m^2 y los signos son los de las direcciones indicadas con las flechas. Se pide:

1) Valores exactos y signos de las tensiones normal y tangencial sobre el plano OC.
2) Valor de la tensión tangencial máxima en O.
3) Dibujar el cuadrilátero elemental sobre el que actúa la tensión tangencial máxima en O. Se acotarán los ángulos que forman sus lados con la dirección OX y se indicarán los signos de las tensiones tangenciales por medio de flechas.



Resolución:

1) Como estamos en un estado de tensión plana, el tensor de tensiones es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\bar{n}_{OB} = \begin{bmatrix} -\cos 30 \\ \operatorname{sen} 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n}_{OA} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} 30 \\ \cos 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

PLANO OA: $\bar{\sigma} = 30 \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 30 \\ -\cos 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $\quad \bar{\tau} = 20\sqrt{3} \begin{bmatrix} -\cos 30 \\ -\operatorname{sen} 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -10\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} = \begin{bmatrix} -15 \\ -25\sqrt{3} \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{OA} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Salen dos ecuaciones:

$$\left| \begin{array}{ll} -\frac{1}{2}\sigma_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{xy} = -15 & (\mathrm{I}) \\ -\frac{1}{2}\tau_{xy} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_y = -25\sqrt{3} & (\mathrm{II}) \end{array} \right.$$

PLANO OB: $\bar{\sigma} = 10 \begin{bmatrix} -\cos 30 \\ \operatorname{sen} 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\sqrt{3} \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{\tau} = 20\sqrt{3} \begin{bmatrix} -\cos 60 \\ -\operatorname{sen} 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\sqrt{3} \\ -30 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} = \begin{bmatrix} -15\sqrt{3} \\ -25 \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{OB} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Salen otras dos ecuaciones:

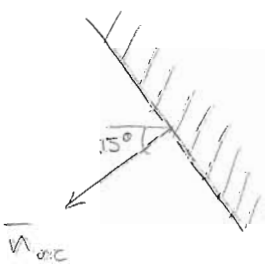
$$\left| \begin{array}{ll} -\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\tau_{xy} = -15\sqrt{3} & (\mathrm{III}) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{xy} + \frac{1}{2}\sigma_y = -25 & (\mathrm{IV}) \end{array} \right.$$

Resolviendo con las tres primeras ecuaciones: $\left| \begin{array}{l} \sigma_x = 30 \ KN/m^2 \\ \sigma_y = -50 \ KN/m^2 \\ \tau_{xy} = 0 \ KN/m^2 \end{array} \right.$

y la cuarta ecuación se cumple también. Por lo tanto, el tensor de tensiones en el punto O es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \quad (KN/m^2)$$

PLANO OC:



$$\bar{n}_{OC} = \begin{bmatrix} -\cos 15 \\ -\operatorname{sen} 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0'966 \\ -0'259 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0'966 \\ -0'259 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28'978 \\ 12'941 \end{bmatrix} \quad (KN/m^2)$$

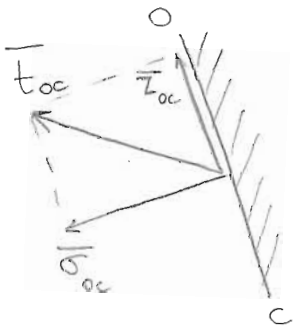
Y las tensiones normal y tangencial son:

$$\boxed{\sigma_{OC} = \bar{n}_{OC}^{T} \cdot \bar{t}} = (-0'966, -0'259) \begin{bmatrix} -28'978 \\ 12'941 \end{bmatrix} = \boxed{24'641 \ \frac{KN}{m^2}} \ (\text{tracción})$$

$$\bar{\sigma}_{OC} = \sigma \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} -23'803 \\ -6'382 \end{bmatrix} \ (KN/m^2)$$

$$\bar{\tau}_{OC} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -5'175 \\ 19'323 \end{bmatrix} \ (KN/m^2) \rightarrow \boxed{\tau_{OC} = 20 \ KN/m^2}$$

Gráficamente:



2)

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$$

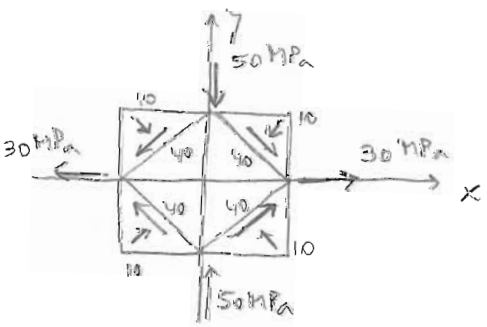
En tensión plana una de las tensiones principales es $\sigma = 0$ con autovector $(0,0,1)$. Al ser el tensor de tensiones en O diagonal, se tiene:

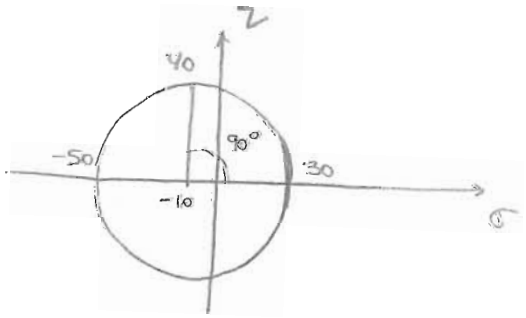
$$\left| \begin{array}{l} \sigma_I = 30 \ KN/m^2 \\ \sigma_{II} = 0 \ KN/m^2 \\ \sigma_{III} = -50 \ KN/m^2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(30+50) = 40 \ \frac{KN}{m^2}}$$

$$\bar{n}_{\tau_{MAX}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{n}_I + \bar{n}_{III}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Forma 45° con OX

3)





NOTA: Problema de tensión plana.

Enunciado: Tensplan9

EXAMEN JUNIO 2001

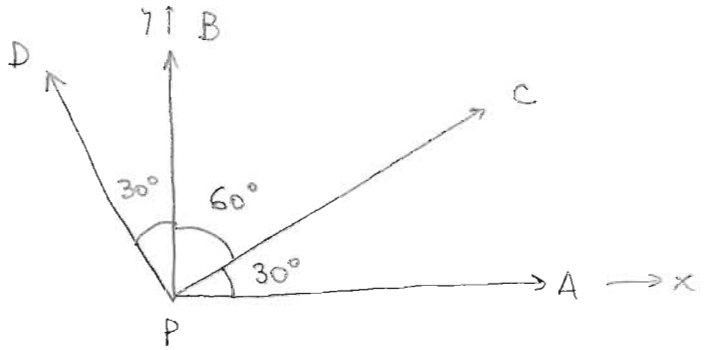
Una laja elástica está sometida a un estado de tensión plana bajo un cierto conjunto de acciones. Después de cargar la laja, se miden en P las deformaciones longitudinales en las direcciones PA, PB y PC. Éstas son, respectivamente:

$$\varepsilon_{PA} = 2 \cdot 10^{-3} \qquad \varepsilon_{PB} = -2 \cdot 10^{-3} \qquad \varepsilon_{PC} = 10^{-3}$$

Las características del material son $E = 2 \cdot 10^{8}\ KN/m^2$ y $\nu = 0'30$.

Se pide:

1) Expresión matricial del tensor de deformaciones en el punto P, en los ejes PA, PB.
2) Variación del ángulo que forman en P las direcciones PC y PD.
3) Tensiones principales en el punto P.
4) Determinar el valor absoluto de la tensión tangencial máxima en P, y direcciones en las que se produce, definidas por el ángulo que forman con PA



Resolución:

1) Al ser un problema de tensión plana:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad \text{con } \varepsilon_z = \frac{-\lambda}{2G+\lambda}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

- Recta PA:

$$\overline{n}_{PA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{PA} = \varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-3}$$

- Recta PB:

$$\bar{n}_{PB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{PB} = \varepsilon_y = -2 \cdot 10^{-3}$$

- Recta PC:

$$\bar{n}_{PC} = \begin{bmatrix} \cos 30 \\ \operatorname{sen} 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{PC} = 10^{-3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{PC} = \underline{D} \cdot \bar{n}_{PC} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & -2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4}\gamma_{xy} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} - 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{PC} = \bar{n}^T \cdot \bar{\varepsilon}_{PC} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4}\gamma_{xy} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} - 10^{-3} \end{bmatrix} = 1'5 \cdot 10^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{xy} + \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{xy} - 5 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 10^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 10^{-3} \longrightarrow \gamma_{xy} = 0$$

Y para obtener ε_z:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0'3 \cdot 2 \cdot 10^8}{1'3 \cdot 0'4} = 11538461 5 \ KN/m^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 76923077 \ KN/m^2$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\lambda}{2G+\lambda}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -0'4286\left(2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}\right) = 0$$

Por lo tanto, el tensor de deformaciones es:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$\bar{n}_{PC} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \bar{n}_{PD} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\gamma_{PC,PD}} = 2 \cdot \bar{n}_{PC}^T \cdot \underline{D} \cdot \bar{n}_{PD} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & -2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[2\sqrt{3} \cdot 10^{-3}, -2 \cdot 10^{-3}\right] \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \boxed{-2\sqrt{3} \cdot 10^{-3} \ rad}$$

3) Tensiones principales. Necesito conocer el tensor de tensiones.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) = 21978022\,0\left(2\cdot10^{-3} - 0'3\cdot2\cdot10^{-3}\right) = 3'077\cdot10^{5}\ \frac{KN}{m^2}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = -3'077\cdot10^{5}\ KN/m^2$$

$$\sigma_z = 0 \quad KN/m^2$$

$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} = 0 \quad KN/m^2$$

Por tanto, el tensor de tensiones es:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 3'077\cdot10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & -3'077\cdot10^{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{en } KN/m^2)$$

Las tensiones principales son:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_I = 3'077\cdot10^{5}\ KN/m^2 \longrightarrow (1,0,0) \\ \sigma_{II} = 0\ KN/m^2 \longrightarrow (0,0,1) \\ \sigma_{III} = -3'077\cdot10^{5}\ KN/m^2 \longrightarrow (0,1,0) \end{array}\right.$$

4) Tensión tangencial máxima en P. Se produce en los planos bisectores de los planos principales.

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left(\sigma_I - \sigma_{III}\right) = 3'077\cdot10^{5}\ KN/m^2}$$

$$\boxed{\overline{n}_{\tau_{MAX}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}$$

Forma 45° con PA.

NOTA: Tensión plana

Defpla 1.

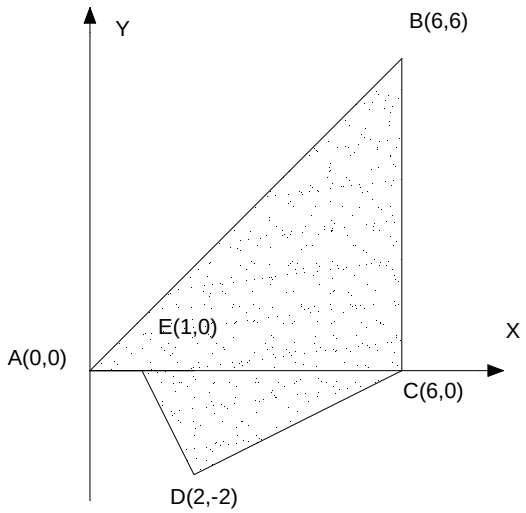
Las deformaciones principales de un cuerpo elástico sometido a un estado de deformación plana son las siguientes:

$$\varepsilon_I = a \bullet (x^2 + y^2) \bullet \begin{bmatrix} y/\sqrt{(x^2+y^2)} \\ x/\sqrt{(x^2+y^2)} \end{bmatrix} \bullet 10^{-6} \qquad \varepsilon_{II} = -a \bullet (x^2 + y^2) \bullet \begin{bmatrix} -x/\sqrt{(x^2+y^2)} \\ y/\sqrt{(x^2+y^2)} \end{bmatrix} \bullet 10^{-6}$$

La expresión entre corchetes contiene el vector unitario de la dirección correspondiente. Se pide:

1. Determinar el tensor de deformaciones en cualquier punto x, y.
2. Probar que tal estado de deformaciones es posible.
3. Decir con la máxima brevedad qué condiciones debe cumplir el sólido para que el campo de desplazamientos del que proviene el campo de deformaciones encontrado sea único, una vez eliminados los movimientos de sólido rígido.
4. En el polígono ABCDE de la figura, determinar la variación del ángulo recto en D y el alargamiento del lado AB.

(Examen de mayo de 1998)



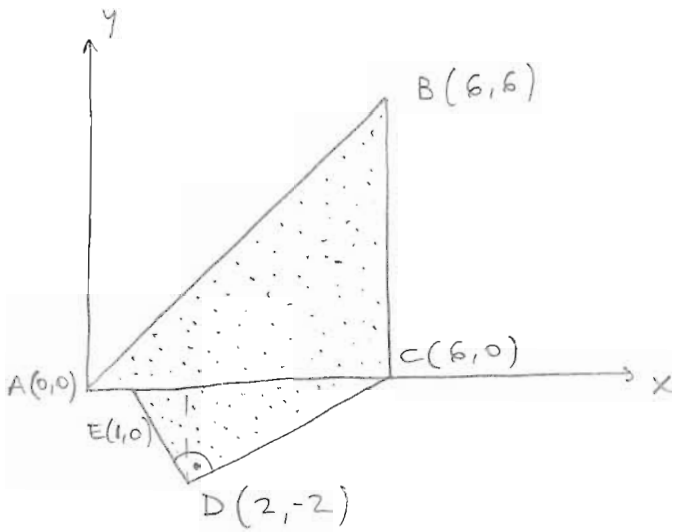
Enunciado: EXAMEN MAYO 1998 Def plan (45')

Un cuerpo elástico está sometido a un estado de deformación plana definido por las siguientes deformaciones principales:

$$\bar{\varepsilon}_I = a(x^2+y^2)\begin{bmatrix} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \qquad \bar{\varepsilon}_{II} = -a(x^2+y^2)\begin{bmatrix} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

La expresión entre corchetes contiene el vector unitario de la dirección correspondiente. Se pide:

1) Determinar el tensor de deformaciones en cualquier punto (x,y)
2) Probar que tal estado de deformaciones es posible.
3) Decir con la máxima brevedad qué condiciones debe cumplir el solido para que el campo de desplazamientos del que proviene el campo de deformaciones encontrado sea único, una vez eliminados los movimientos del sólido rígido
4) En el polígono ABCDE de la figura, determinar la variación del ángulo recto en D y el alargamiento del lado AB.



Resolución

1) Al ser un estado de deformación plana:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

Conocemos los autovalores y los autovectores. Haciendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\overline{\varepsilon}_{I} = a \cdot r^2 \begin{pmatrix} y/r \\ x/r \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \qquad \overline{\varepsilon}_{II} = -a \cdot r^2 \begin{pmatrix} -x/r \\ y/r \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Se tiene que cumplir, al ser deformaciones principales

$$\overline{\varepsilon} = \underline{D} \cdot \overline{d} = \varepsilon \cdot \overline{d}$$

$\overline{\varepsilon}$: Vector deformación por ud. de longitud en la dirección $\overline{d}$

Sustituyendo:

$$\overline{\varepsilon}_{I} = a \cdot r^2 \begin{pmatrix} y/r \\ x/r \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y/r \\ x/r \end{pmatrix}$$

$$\overline{\varepsilon}_{II} = -a r^2 \begin{pmatrix} -x/r \\ y/r \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x/r \\ y/r \end{pmatrix}$$

Quedan cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned}
a \cdot r^2 \cdot 10^{-6} \frac{y}{r} &= \varepsilon_x \cdot \frac{y}{r} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cdot \frac{x}{r} \\
a \cdot r^2 \cdot 10^{-6} \frac{x}{r} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cdot \frac{y}{r} + \varepsilon_y \frac{x}{r} \\
a \cdot r^2 \cdot 10^{-6} \frac{x}{r} &= -\varepsilon_x \cdot \frac{x}{r} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cdot \frac{y}{r} \\
-a \cdot r^2 \cdot 10^{-6} \frac{y}{r} &= -\frac{1}{2}\gamma_{xy} \frac{x}{r} + \varepsilon_y \cdot \frac{y}{r}
\end{aligned}\right| \longrightarrow \left|\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a \cdot 10^{-6} \left[y^2 - x^2\right] \\
\varepsilon_y &= a \cdot 10^{-6} \left[x^2 - y^2\right] \\
\gamma_{xy} &= 4 \cdot 10^{-6} \cdot a \cdot x \cdot y
\end{aligned}\right.$$

(se debe comprobar que la cuarta ecuación se cumple)

Por tanto, el tensor de deformaciones queda:

$$\boxed{\underline{D} = a \cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} [y^2 - x^2] & 2xy \\ 2xy & [x^2 - y^2] \end{pmatrix}}$$

2) Para comprobar que este estado de deformaciones es posible, deben cumplirse las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \longrightarrow 2 \cdot a \cdot 10^{-6} + 2 \cdot a \cdot 10^{-6} = 4 \cdot a \cdot 10^{-6} \checkmark$$

3) Debe cumplir las siguientes condiciones:

- Cumplir las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones (ya sabemos que lo hace).
- El sólido debe ser simplemente conexo (sin agujeros)

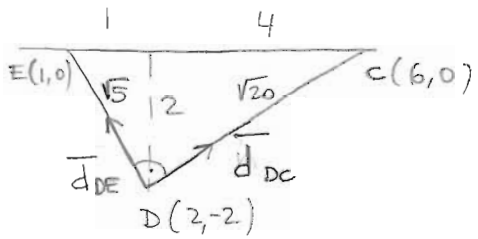
4)

• Variación del ángulo recto en $D(2,-2)$.

El tensor de tensiones en D es:

$$\underline{D}^D = -8\cdot 10^{-6}\, a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores unitarios en DE y DC son:



$$\bar{d}_{DE} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{d}_{DC} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{DE,DC} = 2\, \bar{d}_{DE}^{\,T} \cdot \underline{D}^D \cdot \bar{d}_{DC} = 2\cdot \frac{1}{\sqrt{20}} (-2, 4) \left(-8\cdot 10^{-6} a\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\gamma_{DE,DC} = -9'6\cdot a\cdot 10^{-6}\ \text{rad}}$$

∘ Alargamiento del lado AB: $\bar{d}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ecuación de AB: $x = y$

$$\underline{D}^{AB} = 2\cdot a\cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon}_{AB} = \underline{D}^{AB} \cdot \bar{d}_{AB} = 2\cdot a\cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2\cdot a\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

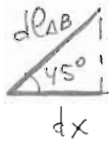
Y la deformación longitudinal en cada punto del segmento AB es:

$$\varepsilon_{AB} = \overline{d}_{AB}^{T} \cdot \overline{\varepsilon}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1) \cdot \frac{2 \cdot a \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} = 2 \cdot a \cdot 10^{-6} x^2$$

Por lo tanto, el alargamiento que se produce en el lado AB es:

$$\Delta l_{AB} = \int_A^B \varepsilon_{AB} \cdot dl_{AB} = \int_0^6 2 \cdot a \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{2}}$$

Ya que:



$$dl_{AB} \cdot \cos 45 = dx \rightarrow dl_{AB} = \frac{2\,dx}{\sqrt{2}}$$

Entonces:

$$\boxed{\Delta l_{AB}} = \frac{4 a \cdot 10^{-6}}{3\sqrt{2}} \cdot x^3 \Big|_0^6 = \boxed{2'036 \cdot 10^{-4} \cdot a}$$

NOTA: Problema de deformación plana

Enunciado: (50') Defpla 2

La laja rectangular ABCD, de espesor unidad, se encuentra sometida a un estado de deformación plana, con cargas únicamente en su contorno. Su material tiene un módulo de deformación longitudinal E y un coeficiente de Poisson ν. El campo de deformaciones de la laja es:

$$\varepsilon_x = K\left[-(1-\nu+\delta)x^2 + y^2\right]$$

$$\varepsilon_y = K\left[\left(\frac{\delta}{\nu} - \delta + \nu\right)x^2 - y^2\right]$$

$$\gamma_{xy} = 4Kxy$$

K = módulo de compresión $= \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$

Se pide:

1) Determinar el coeficiente δ y las tensiones normales y tangenciales a lo largo del lado AB, y representar gráficamente esta distribución.

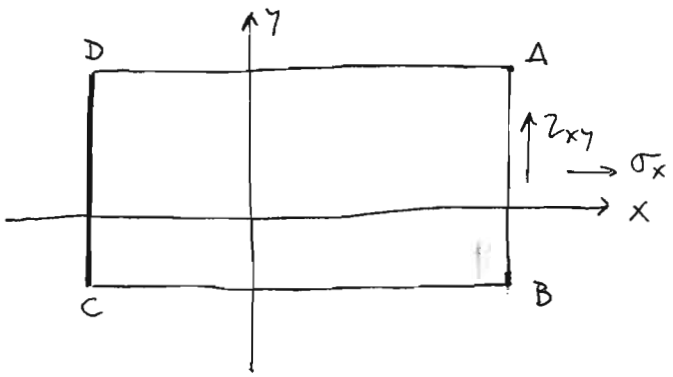
2) Deducir las líneas isostáticas y representar con trazo continuo las correspondientes a la tensión σ_1 y discontinuo a σ_2. Se indicarán posibles puntos singulares.

Las coordenadas de los vértices de la placa, en metros son:

A (6,4); B (6,-2), C (-4,-2), D(-4,4)

Resolución:

1)



$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Lo primero que hay que ver es que el campo de deformaciones cumpla las ecuaciones de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo:

$$2K + 2K\left(\frac{\delta}{\nu} - \delta + \nu\right) = 4K$$

$$2K\delta - \nu\delta + \nu^2 = 2K\delta$$

$$\boxed{\delta = \nu}$$

Por tanto:

$$\left|\begin{array}{ll} \varepsilon_x = K(y^2 - x^2) & \varepsilon_z = 0 \\ \varepsilon_y = K(x^2 - y^2) & \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{xy} = 4Kxy & \gamma_{yz} = 0 \end{array}\right.$$

Aplicando las ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2G\,\varepsilon_x \qquad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2G \cdot \varepsilon_y \qquad \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = 0$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

Sustituyendo:

$$\sigma_x = 2 \cdot G \cdot K \cdot (y^2 - x^2) = \frac{2E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{E}{3(1-2\nu)}(y^2 - x^2) = \frac{E^2(y^2 - x^2)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y = 2\cdot\frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{E}{3(1-2\nu)}(x^2-y^2) = \frac{E^2(x^2-y^2)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot y\cdot\frac{E}{3(1-2\nu)}\,xy = \frac{2E^2\,x\,y}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$$

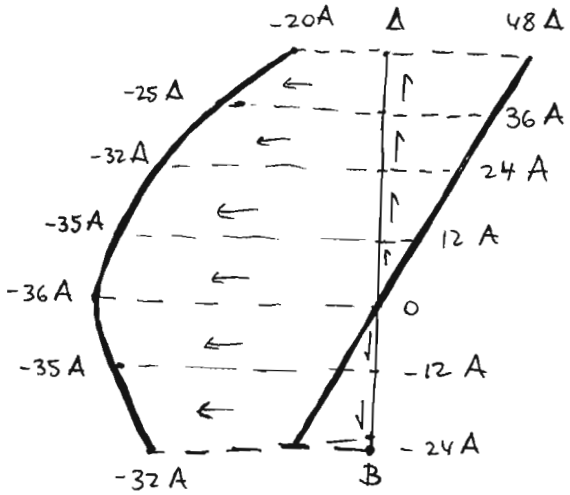
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x+\sigma_y) = \frac{E^2}{3(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot 0 = 0$$

Particularizando para el lado AB ($x=6$):

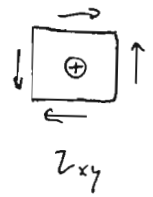
$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y^2-36 & 12y & 0 \\ 12y & 36-y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $A = cte = \dfrac{E^2}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$

Gráficamente



σ_x



τ_{xy}

τ_{xy}

2) Líneas isostáticas. La ecuación es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{1+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2}$$

$$\sigma_x-\sigma_y = A\cdot(y^2-x^2-x^2+y^2) = 2A(y^2-x^2)$$

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2A(y^2-x^2)}{2\cdot A\cdot 2\cdot x\cdot y} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{2xy} \pm \sqrt{1+\left(\frac{y^2-x^2}{2xy}\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{2xy} \pm \sqrt{\frac{4x^2y^2+y^4+x^4-2x^2y^2}{4x^2y^2}} =$$

$$= \frac{x^2-y^2}{2xy} \pm \sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2}{(2xy)^2}} = \frac{x^2-y^2}{2xy} \pm \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

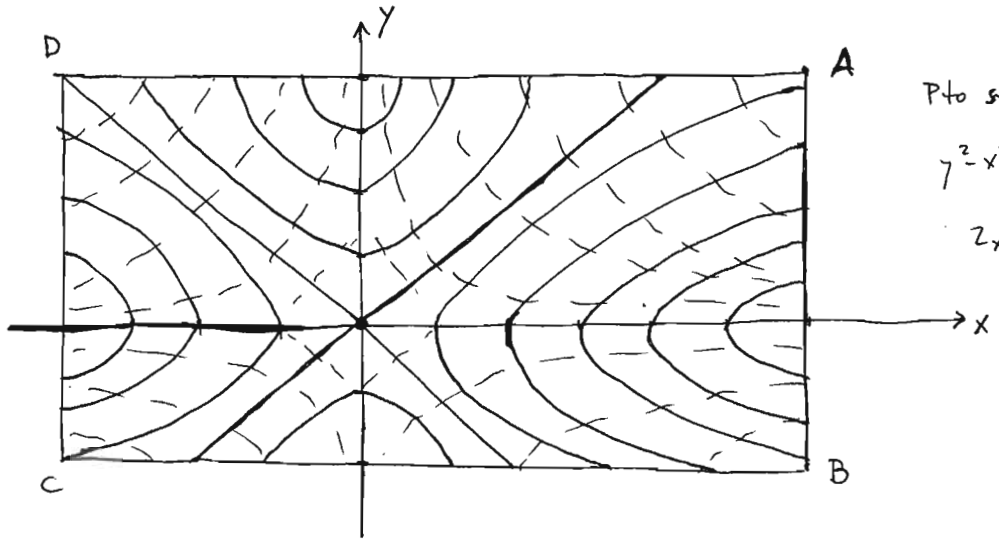
Por tanto, las dos familias son:

$$1: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{2xy} = \frac{x}{y} \Rightarrow -x\,dx + y\,dy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow \boxed{y^2-x^2=cte}$$

$$2: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2y^2}{2xy} = \frac{-y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln x = -\ln y + C_2$$

$$\Rightarrow \ln(y) + \ln(x) = cte \Rightarrow \boxed{x\cdot y = cte}$$

Son dos familias de hipérbolas ortogonales entre sí.
La representación gráfica es:



Pto singular: $\sigma_x = \sigma_y$; $\tau_{xy} = 0$

$y^2 - x^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \left| \begin{matrix} x=y \\ x=-y \end{matrix} \right.$

$\tau_{xy} = 0 \Rightarrow x\cdot y = 0 \Rightarrow$ sólo cumple las dos ecuaciones $\left| \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right.$

$(0,0)$ PUNTO SINGULAR

HP: Para dibujar cada familia de curvas $f(x)=cte \Rightarrow$ $\boxed{\text{PLOT}}$ TYPE: PS - Contour

En $\boxed{\text{OPTS}}$ introducir cotas

NOTA: Problema de deformación plana.

Defpla 3.

En el cálculo mediante elementos finitos de una laja en estado de deformación plana, se han obtenido los desplazamientos horizontal u, y vertical v del elemento triangular de vértices 1-2-3, cuyos valores han sido u_1 = 0.020; v_1 = 0.035; u_2 = 0.049; v_2 = 0.060; u_3 = -0.012; v_3 = 0.033 (en metros).

Se supone que dentro del elemento estos desplazamientos varían linealmente, es decir, son de la forma:

$$u(x,y) = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot y \qquad\qquad v(x,y) = B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot y$$

Las características del material son módulo de elasticidad $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m² y coeficiente de Poisson ν = 0.20. Se pide:

1. Determinar la máxima tensión tangencial que se produce en el centro de gravedad de la laja, que es un elemento triangular de coordenadas de los vértices 1 (0, 0), 2 (4, 0), 3 (0, 2).

2. Obtener la tensión normal al lado hipotenusa del triángulo en su punto medio.

Enunciado: Defpla3 (40')

En el cálculo mediante elementos finitos de una laja en estado de deformación plana, se han obtenido los desplazamientos horizontal u, y vertical v del elemento triangular de vértices 1-2-3, cuyos valores han sido $u_1 = 0'020$, $v_1 = 0'035$, $u_2 = 0'049$, $v_2 = 0'060$, $u_3 = -0'012$, $v_3 = 0'033$ (en metros).

Se supone que dentro del elemento estos desplazamientos varían linealmente, es decir, son de la forma:

$$u(x,y) = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot y \qquad v(x,y) = B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot y$$

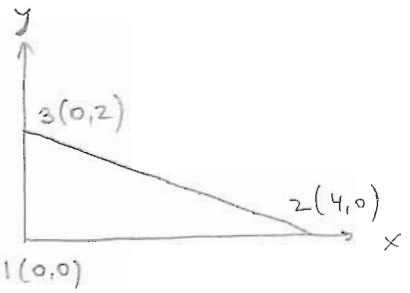
Las características del material son $E = 3 \cdot 10^4 \frac{KN}{m^2}$, $\nu = 0'20$. Se pide:

1) Determinar la máxima tensión tangencial que se produce en el centro de gravedad de la laja, que es un elemento triangular de coordenadas de los vértices 1(0,0), 2(4,0), 3(0,2).
2) Obtener la tensión normal al lado hipotenusa del triángulo en su punto medio

Resolución:

1) Para determinar la máxima tensión tangencial necesito las tensiones principales ($\tau_{MAX} = \frac{1}{2}[\sigma_I - \sigma_{III}]$) y por tanto el tensor de tensiones. El proceso es el siguiente:

$$\text{Movimientos} \rightarrow \text{Deformaciones} \xrightarrow[\text{LAMÉ}]{} \text{Tensiones}$$



Al ser deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

Como se conocen los movimientos de los vértices:

$$u(x,y) = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot y$$

$$\left| \begin{array}{l} u(0,0) = 0'020 \rightarrow A_0 = 0'020 \\ u(4,0) = 0'049 \rightarrow 0'049 = A_0 + 4 \cdot A_1 \rightarrow A_1 = 0'00725 \\ u(0,2) = -0'012 \rightarrow -0'012 = A_0 + 2A_2 \rightarrow A_2 = -0'016 \end{array} \right.$$

Sustituyendo: $\boxed{u(x,y) = 0'020 + 0'00725 \cdot x - 0'016 \cdot y}$

$$v(x,y) = B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot y$$

$$\left| \begin{array}{l} v(0,0) = 0'035 \rightarrow B_0 = 0'035 \\ v(4,0) = 0'060 \rightarrow 0'060 = B_0 + 4B_1 \rightarrow B_1 = 0'00625 \\ v(0,2) = 0'033 \rightarrow 0'033 = B_0 + 2B_2 \rightarrow B_2 = -0'001 \end{array} \right.$$

Sustituyendo: $\boxed{v(x,y) = 0'035 + 0'00625 \cdot x - 0'001 \cdot y}$

El campo de deformaciones es:

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0'00725 \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -0'001 \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -0'016 + 0'00625 = -0'00975 \end{array} \right.$$

Aplicando Lamé:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0'00625$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 8333'333 \text{ MPa}$$

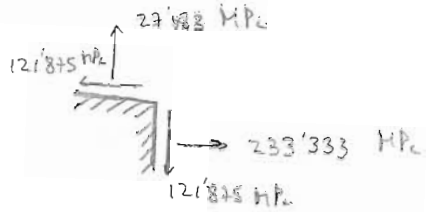
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 12500 \text{ MPa}$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x = 233'333 \text{ MPa} \qquad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 52'083 \text{ MPa} \\ \sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y = 27'083 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = -121'875 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Estos valores verifican las ecuaciones de equilibrio interno en tensiones (al ser todos los valores constantes), las de compatibilidad de deformaciones (por provenir de un campo de movimientos) y las condiciones de contorno (de donde hemos sacado las constantes).

Por tanto, el tensor de tensiones es:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 233'333 & -121'875 & 0 \\ -121'875 & 27'083 & 0 \\ 0 & 0 & 52'083 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$



Las tensiones principales son (una es 52'083 MPa):

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 130'208 \pm 159'65$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \sigma_I = 289'858 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = 52'083 \text{ MPa} \\ \sigma_{III} = -29'442 \text{ MPa} \end{cases}$$

Y la máxima tensión tangencial:

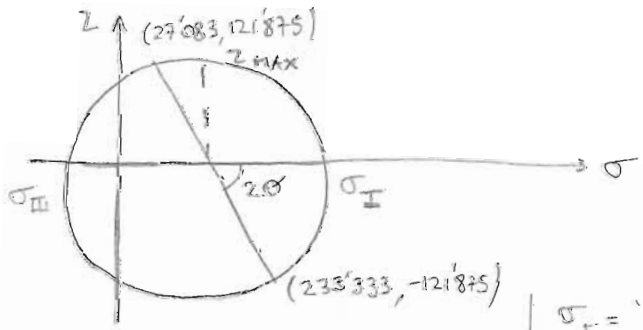
$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left[\sigma_I - \sigma_{III}\right] = 159'65 \text{ MPa}}$$

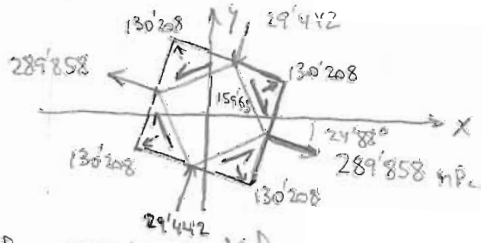
Si se utiliza el círculo de Mohr

CENTRO: $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 130'208$ MPa

RADIO: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 159'65$ MPa

CENTRO: $O = (130'208, 0)$





$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{121'875}{(233'333 - 130'208)} \rightarrow \theta = 49'76°$$

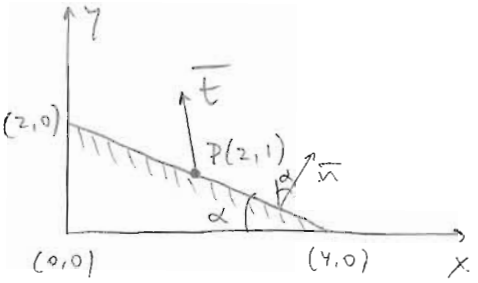
$\tau_{MAX} = R = 159'65$ MPa

$\sigma_I = 'O' + R = 289'858$ MPa

$\sigma_{II} = 52'083$ MPa

$\sigma_{III} = 'O' - R = -29'442$ MPa

2) Tensión normal en el punto medio del lado hipotenusa.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{20} \\ 4/\sqrt{20} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Cauchy:

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 233'333 & -121'875 & 0 \\ -121'875 & 27'083 & 0 \\ 0 & 0 & 52'083 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'44721 \\ 0'89443 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4'66 \\ -30'28 \\ 0 \end{pmatrix}$$

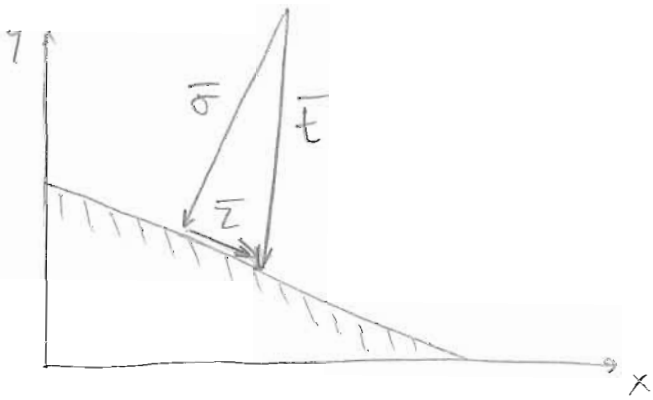
Con las siguientes componente:

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = (0'44721,\ 0'89443,\ 0) \begin{bmatrix} -4'66 \\ -30'28 \\ 0 \end{bmatrix} = -29'167 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} -13'044 \\ -26'088 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \sqrt{|\bar{t}|^2 - \sigma^2} = \sqrt{30'64^2 - 29'167^2} = 9'39 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -4'66 \\ -30'28 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -13'044 \\ -26'088 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8'384 \\ -4'192 \\ 0 \end{bmatrix}$$



NOTA: Problema de deformación plana

Enunciado: Defplay

Dado el siguiente campo de deformaciones, obtener el campo de desplazamientos correspondiente:

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_x = a \\ \varepsilon_y = b \\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = c \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array}\right.$$

Las condiciones de contorno son $\left|\begin{array}{l} u(0,0) = 0 \\ v(0,0) = 0 \\ \theta_z(0,0) = 0 \end{array}\right.$

Resolución:

Es un caso de deformación plana. Por lo tanto, el campo de movimientos será del tipo:

$$\left|\begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \\ w = cte \end{array}\right.$$

Las deformaciones, en función de los movimientos, son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c$$

Hay que integrar estas ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \Rightarrow u(x,y) = a \cdot x + f(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = b \Rightarrow v(x,y) = b \cdot y + g(x)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = g'(x)$$

Sustituyendo:

$$\gamma_{xy} = f'(y) + g'(x) = c = cte$$

$$f'(y) = cte = K_1 = \frac{df}{dy}$$

$$g'(x) = cte = K_2 = \frac{dg}{dx}$$

Luego:

$$f(y) = K_1 \cdot y + K_3$$

$$g(x) = K_2 \cdot x + K_4$$

Y el campo de desplazamientos es:

$$\left| \begin{array}{l} u = a \cdot x + K_1 \cdot y + K_3 \\ v = b \cdot y + K_2 \cdot x + K_4 \end{array} \right.$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$u(0,0) = 0 \Rightarrow K_3 = 0$$

$$v(0,0) = 0 \Rightarrow K_4 = 0$$

$$\omega_z(0,0) = 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(K_2 - K_1\right) = 0 \Rightarrow K_1 = K_2$$

Me falta una ecuación. Cojo $\gamma_{xy} = c$

$$\gamma_{xy} = c = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = K_1 + K_2 = c \Rightarrow K_1 = K_2 = \frac{c}{2}$$

El campo de desplazamientos queda:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = ax + \frac{cy}{2} \\ v = by + \frac{cx}{2} \end{array}}$$

NOTA: Problema de obtención del campo de movimientos, teniendo como dato el campo de deformaciones y c. de contorno, en deformación plana.

Enunciado. **EXAMEN ABRIL 2001** Defpla5

El muro de la figura está empotrado en su base en un terreno rígido y libre en sus otros tres contornos; su espesor es $2h$ y su ancho muy grande. Sobre el paramento $y=h$ actúa la presión hidrostática de un líquido de peso específico γ (kN/m^3) cuya superficie libre coincide con la coronación del muro. El paramento $y=-h$ está libre. No se considera la acción del peso propio del muro. Se considera la siguiente distribución de tensiones:

$$\sigma_x = \frac{\gamma \cdot h}{4}\left(\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^3 + A\cdot\alpha\cdot\beta\right)$$

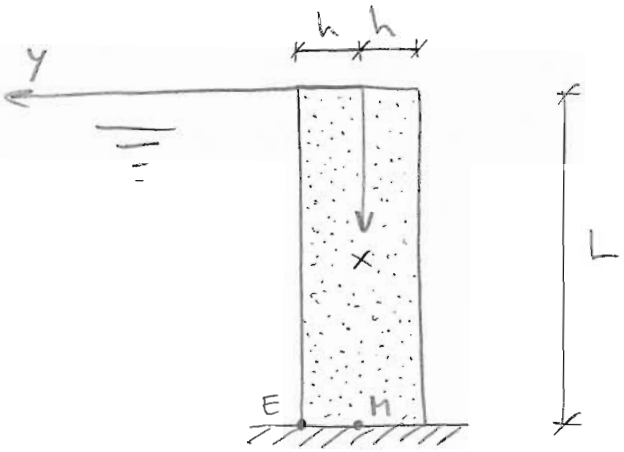
$$\sigma_y = \gamma \cdot h\left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha\beta^3 - 2B\alpha\beta\right)$$

$$\tau_{xy} = \gamma \cdot h\left(1-\beta^2\right)\left(B\alpha^2 - \frac{1}{3}B\left(1+\beta^2\right) + \frac{A}{8}\right)$$

siendo $\alpha = x/h$, $\beta = y/h$. Se pide:

1) Verificar si la distribución de tensiones propuesta es la solución exacta del problema elástico anterior. Para ello
   - Se enumerarán todas las ecuaciones que deberá cumplir para ser solución.
   - Se determinarán las constantes A y B para que se cumpla el mayor número posible de dichas ecuaciones.
   - Se indicará claramente qué ecuaciones se cumplen y cómo.
2) Suponiendo que la solución anterior es exacta y para el caso $h=1$, $L=10$, comparar los valores dados por la solución anterior y por Resistencia de Materiales para la tensión normal en el punto $E(L,h)$ y la tensión tangencial en el punto $M(L,0)$.

NOTA: Se permite tomar $A=1$ si no se ha determinado un valor más preciso.



Resolución: Se trata de un problema de deformación plana.

1) Para que la distribución de tensiones propuesta sea la solución exacta del problema dado se deben cumplir las siguientes ecuaciones:
- ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN TENSIONES.
- ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES.
- CONDICIONES DE CONTORNO.

• Ecuaciones de equilibrio en tensiones. No hay cargas másicas.

$$\sigma_x = \frac{\gamma h}{4}\left(\frac{x^3}{h^3}\frac{y}{h} - 2\cdot\frac{x}{h}\frac{y^3}{h^3} + A\cdot\frac{x}{h}\frac{y}{h}\right) = \frac{\gamma}{4}\left(\frac{x^3 y}{h^3} - \frac{2xy^3}{h^3} + \frac{Axy}{h}\right)$$

$$\sigma_y = \gamma h\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{h} + \frac{1}{4}\frac{x}{h}\frac{y^3}{h^3} - 2B\frac{x}{h}\frac{y}{h}\right) = \gamma\left(\frac{-x}{2} + \frac{xy^3}{4h^3} - \frac{2Bxy}{h}\right)$$

$$\tau_{xy} = \gamma h\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)\left(B\cdot\frac{x^2}{h^2} - \frac{B}{3}\left(1 + \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{A}{8}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{24h^3}\left[24Bx^2h^2 - 8Bh^4 + 3Ah^4 - 24Bx^2y^2 + 8By^4 - 3Ah^2y^2\right]$$

y las ecuaciones de equilibrio son:

$$(*)\quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\gamma}{4}\left[\frac{3x^2y}{h^3} - \frac{2y^3}{h^3} + \frac{Ay}{h}\right] + \frac{\gamma}{24h^3}\left[-48Bx^2y + 32By^3 - 6Ah^2y\right] = 0$$

$$18x^2y - 12y^3 + 6\cancel{h^2}Ay - 48Bx^2y + 32By^3 - 6\cancel{Ah^2}y = 0$$

$$18x^2 - 12y^2 - 48Bx^2 + 32By^2 = 0$$

$$x^2\left[3-8B\right]-y^2\left[3-8B\right]=0 \rightarrow (x^2-y^2)(3-8B)=0$$

$$3-8B=0 \rightarrow \boxed{B=\frac{3}{8}}$$

$$(*)\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0$$

$$\frac{\gamma}{24h^3}\left[48Bxh^2-48Bxy^2\right]+\gamma\left[\frac{3xy^2}{4h^3}-\frac{2B\cdot x}{h}\right]=0$$

$$48Bxh^2-48Bxy^2+18xy^2-48Bxh^2=0$$

Sustituyendo el valor de B, se tiene:

$$18\cdot x\cdot h^2-18xy^2+18xy^2-18xh^2=0 \rightarrow 0=0 \checkmark$$

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio en tensiones se cumplen con $B=3/8$.

- Ecuación de compatibilidad de deformaciones.

Hay que aplicar antes Lamé para obtener las deformaciones.

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_x-\nu(1+\nu)\sigma_y\right]=$$

$$=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\frac{\gamma}{4}\left(\frac{x^3y}{h^3}-\frac{2xy^3}{h^3}+\frac{Axy}{h}\right)-\nu(1+\nu)\gamma\left(\frac{-x}{2}+\frac{xy^3}{4h^3}-\frac{3xy}{4h}\right)\right]$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_y-\nu(1+\nu)\sigma_x\right]=$$

$$=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\gamma\left(\frac{-x}{2}+\frac{xy^3}{4h^3}-\frac{3xy}{4h}\right)-\nu(1+\nu)\frac{\gamma}{4}\left(\frac{x^3y}{h^3}-\frac{2xy^3}{h^3}+\frac{Axy}{h}\right)\right]$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{\gamma}{24h^3G}\left[24Bx^2h^2-8Bh^4+3Ah^4-24Bx^2y^2+8By^4-3Ah^2y^2\right]$$

$$(*)\quad \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\frac{\gamma}{4}\left(\frac{-12xy}{h^3}\right)-\nu(1+\nu)\gamma\left(\frac{6xy}{4h^3}\right)-\nu(1+\nu)\frac{\gamma}{4}\frac{6xy}{h^3}\right]=$$

$$=\frac{-3xy\gamma}{2Gh^3}=\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \checkmark$$

Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad de deformaciones también se cumple con $B = \frac{3}{8}$.

• Condiciones de contorno:

$$* \ \sigma_y \big|_{y=-h} = 0 \rightarrow \gamma\left(\frac{-x}{2} - \frac{xh^3}{4h^3} + \frac{2Bxh}{h}\right) = 0 \rightarrow \boxed{B = \frac{3}{8}}$$

$$* \ \tau_{xy} \big|_{y=-h} = 0 \rightarrow \frac{\gamma}{24h^3}\left[\cancel{24Bx^2h^2} - \cancel{8Bh^4} + \cancel{3Ah^4} - \cancel{24Bx^2h^2} + \cancel{8Bh^4} - \cancel{3Ah^4}\right] = 0$$

$$* \ \sigma_x \big|_{x=0} = 0 \rightarrow 0 = 0 \ \checkmark$$

$$* \ \tau_{xy} \big|_{x=0} = 0 \rightarrow \frac{\gamma}{24h^3}\left[-8Bh^4 + 3Ah^4 + 8By^4 - 3Ah^2y^2\right] = 0$$

No se cumple de manera general. $\forall y$.

$$* \ \sigma_y \big|_{y=h} = -\gamma \cdot x \rightarrow \gamma\left[\frac{-x}{2} + \frac{xh^3}{4h^3} - \frac{2Bxh}{h}\right] = -\gamma x \rightarrow \boxed{B = \frac{3}{8}}$$

$$* \ \tau_{xy} \big|_{y=h} = 0 \rightarrow \frac{\gamma}{24h^3}\left[\cancel{24Bx^2h^2} - \cancel{8Bh^4} + \cancel{3Ah^4} - \cancel{24Bx^2h^2} + \cancel{8Bh^4} - \cancel{3Ah^4}\right] = 0 \ \checkmark$$

Para obtener el valor de A se puede imponer que la resultante de las tensiones tangenciales en $x=0$ sea nula.

$$F_y = \iint_\Omega \tau_{xy} \, d\Omega = 0 \rightarrow \int_{-h}^{h} \tau_{xy} \, dy = 0 \quad \text{(por ud. longitud en x)}$$

$$\frac{\gamma}{24h^3}\int_{-h}^{h}\left[24Bx^2h^2 - 8Bh^4 + 3Ah^4 - 24Bx^2y^2 + 8By^4 - 3Ah^2y^2\right] dy = 0$$

$$\left[24Bx^2h^2y - 8Bh^4y + 3Ah^4y - 8Bx^2y^3 + \frac{8}{5}By^5 - Ah^2y^3\right]\Big|_{-h}^{h} =$$

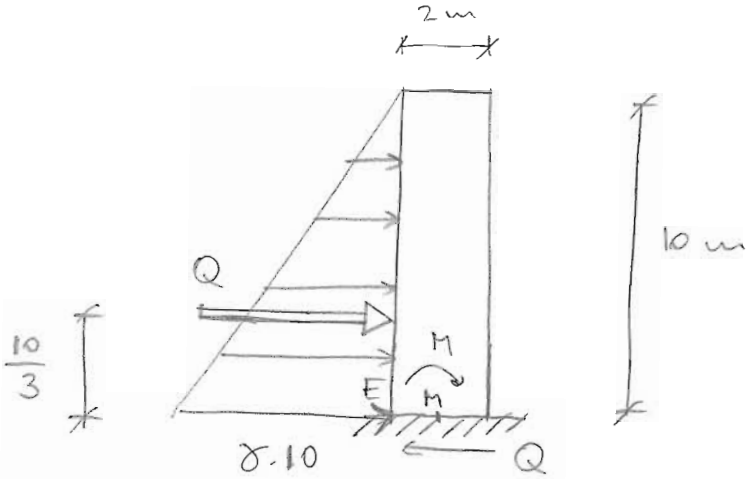
$$= 24Bx^2h^3 - 8Bh^5 + 3Ah^5 - 8Bx^2h^3 + \frac{8}{5}Bh^5 - Ah^5 + 24Bx^2h^3 -$$

$$- 8Bh^5 + 3Ah^5 - 8Bx^2h^3 + \frac{8}{5}Bh^5 - Ah^5 = 32Bx^2h^3 - \frac{64}{5}Bh^5 + 4Ah^5 = 0$$

Con $x=0 \rightarrow -\frac{64}{5}B = -4A \rightarrow A = \frac{16B}{5}$

Con $B = \frac{3}{8} \rightarrow \boxed{A = \frac{6}{5}}$

2) $h=1$, $L=10$



En Resistencia de Materiales

Esfuerzos:

$$Q = \frac{1}{2}\gamma \cdot 10 \cdot 10 = 50\gamma$$

$$M = E \cdot \frac{10}{3} = \frac{500}{3}\gamma$$

Tensiones:

$$\sigma_E = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{500\gamma \cdot h}{3\,\frac{1}{12}\,1(2h)^3} = \frac{250\gamma}{h^2} \xrightarrow{h=1} \boxed{\sigma_E = 250\gamma}$$

$$\tau_n = \frac{Q \cdot M_{est}}{I \cdot b} = \frac{50\gamma \cdot h \cdot 1 \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12}\,1(2h^3) \cdot 1} = \frac{75\gamma}{2h} \Rightarrow \boxed{\tau_n = 37'5\gamma}$$

En Elasticidad:

Tensiones:

$$\sigma_E = \sigma_x = \frac{\gamma}{4}\left(\frac{10^3 \cdot 1}{1^3} - \frac{2 \cdot 10 \cdot 1^3}{1^3} + \frac{6 \cdot 10 \cdot 1}{5 \cdot 1}\right) \Rightarrow \boxed{\sigma_E = 248\gamma}$$

$$\tau_n = \tau_{xy} = \frac{\gamma}{24 \cdot 1^3}\left[900 - 3 + \frac{18}{5}\right] \Rightarrow \boxed{\tau_n = 37'525\gamma}$$

5.7- FUNCIÓN DE AIRY

La función de Airy o función de tensiones proporciona una solución en tensiones al problema elástico en Elasticidad bidimensional, empleándose en deformación plana o en tensión plana. Si Φ es una función de Airy, se demuestra:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{-\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial y} - f_x \cdot y - f_y \cdot x \end{aligned}}$$

f_x y f_y son fuerzas másicas

Las tensiones así obtenidas satisfacen las ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones si las fuerzas de masa f_x y f_y son constantes, sin importar cómo sea Φ.

Para satisfacer las condiciones de compatibilidad, Φ debe ser biarmónica.

$$\boxed{\Delta^2 \Phi = \nabla^4 \Phi = 0} \qquad \text{Como} \qquad \Delta\Phi = \sigma_x + \sigma_y \longrightarrow \boxed{\Delta\lfloor \sigma_x + \sigma_y \rfloor = 0}$$

Con los siguientes operadores: ∇ : Divergencia

Δ : Laplaciano $\qquad \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

Por lo tanto, se tiene:

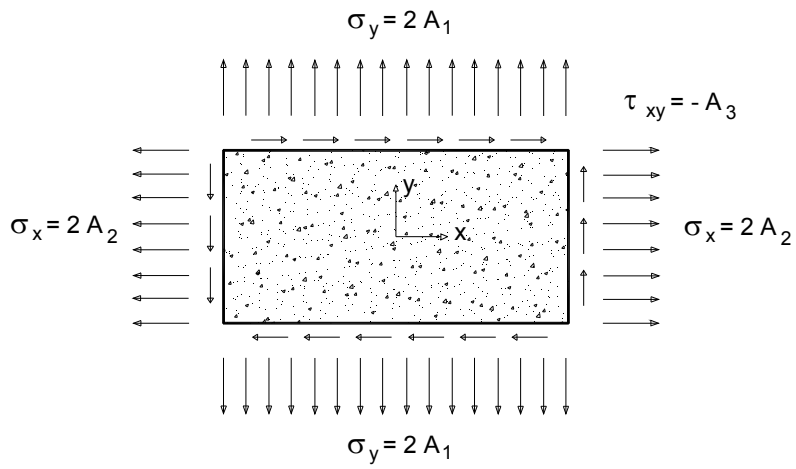
$$\boxed{\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0}$$

Por tanto, las tensiones provenientes de cualquier función biarmónica son solución de algún problema elástico, al cumplir automáticamente las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones. Si además cumplen las condiciones de contorno de nuestro problema, entonces serán su solución.

Ejemplo: Si, por ejemplo, se toma un polinomio de segundo grado.

$$\Phi = A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot y^2 + A_3 \cdot x \cdot y + A_4 \cdot x + A_5 \cdot y + A_6 \longrightarrow \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \cdot A_2 \\ \sigma_y &= 2 \cdot A_1 \\ \tau_{xy} &= -A_3 \end{aligned}$$

Resulta, por tanto, un campo de tensiones constante. Es una función biarmónica, solución del siguiente problema elástico:



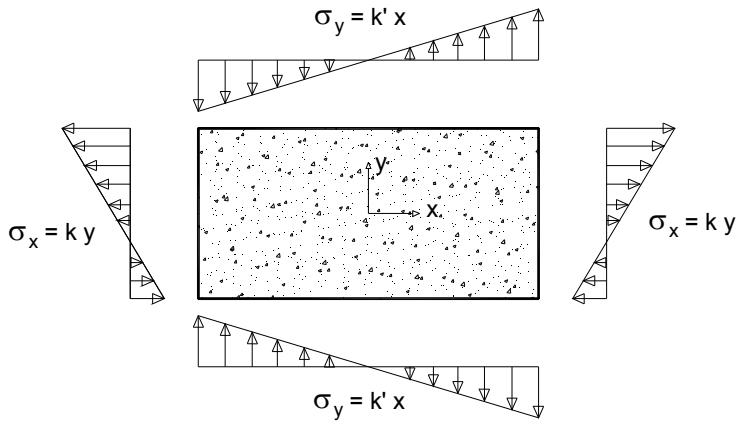
Si se toma una función de Airy de tercer grado (que es biarmónica):

$$\Phi = A_1 \cdot x^3 + A_2 \cdot y^3 + A_3 \cdot x^2 \cdot y + A_4 \cdot x \cdot y^2 + A_5 \cdot x^2 + A_6 \cdot y^2 + A_7 \cdot x \cdot y + A_8 \cdot x + A_9 \cdot y + A_{10}$$

Las tensiones serán:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 6 \cdot A_2 \cdot y + 2 \cdot A_4 \cdot x + 2 \cdot A_6 \\ \sigma_y &= 6 \cdot A_1 \cdot x + 2 \cdot A_3 \cdot y + 2 \cdot A_5 \\ \tau_{xy} &= -2 \cdot A_3 \cdot x - 2 \cdot A_4 \cdot y - A_7 \end{aligned}\right| \quad \text{TENSIONES LINEALES}$$

Esta función de Airy es solución del siguiente problema elástico:



Por lo tanto, la regla práctica a utilizar es coger funciones de Airy dos grados superiores a las leyes de tensiones en los contornos.

Airy 1.

Las coordenadas de los vértices de la laja trapezoidal de la figura expresadas en cm son A(0, 0); B(100, 20); C(100, 100) y D(0, 100). Se supone que la laja se encuentra bajo un estado de deformación plana y que las tensiones debidas a cargas exteriores se derivan de la siguiente función de tensiones:

$$\Phi = \frac{x \cdot y^3}{30} + \frac{4 \cdot x^3 \cdot y}{3000} - \frac{2 \cdot x^2 \cdot y^2}{100} + 10 \cdot y^2 \qquad \text{(en MPa)}$$

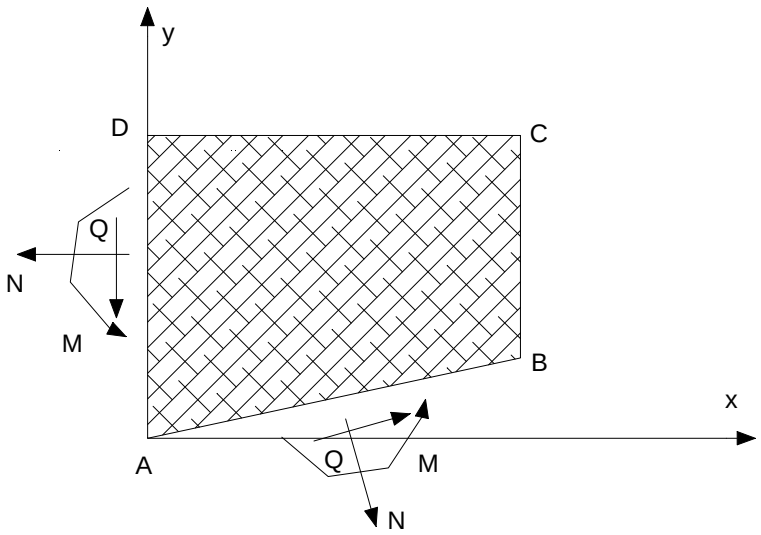
Se pide:

1. Independientemente de la validez de la función ϕ como solución del problema anterior, determinar las tensiones en la laja y comprobar que están en equilibrio en el interior.

2. Determinar para los lados AB y AD los esfuerzos axil, cortante y momento que equilibran globalmente las tensiones. Se adoptarán los signos indicados en la figura.

3. Verificar si las deformaciones resultantes de las tensiones anteriores son compatibles; es decir, si existe un campo de movimientos que podría producir esas deformaciones.

(Examen de septiembre de 1989)



Enunciado: Airy 1 $\boxed{\text{EXAMEN SEPTIEMBRE 1989}}$

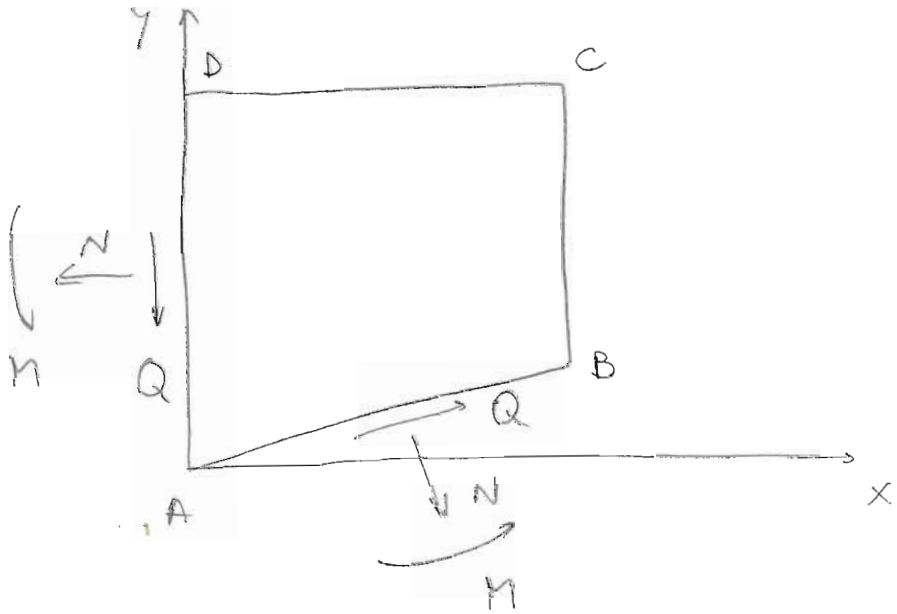
Las coordenadas de los vértices de la laja trapezoidal de la figura expresadas en cm son A(0,0), B(100,20), C(100,100) y D(0,100). Se supone que la laja se encuentra bajo un estado de deformación plana y que las tensiones debidas a las cargas exteriores se derivan de la siguiente función de tensiones.

$$\phi = \frac{x\,y^3}{30} + \frac{4x^3y}{3000} - \frac{2x^2y^2}{100} + 10y^2 \quad \text{(en MPa)}$$

(x, y en metros)

Se pide:

1) Independientemente de la validez de la función ϕ como solución del problema anterior, determinar las tensiones en la laja y comprobar que están en equilibrio en el interior.
2) Determinar para los lados AB y AD los esfuerzos axil, cortante y momento que equilibran globalmente las tensiones. Se adoptarán los signos indicados en la figura.
3) Verificar si las deformaciones resultantes de las tensiones anteriores son compatibles, es decir, si existe un campo de movimientos que podría producir esas deformaciones.



Resolución:

1) La función de Airy es: $\phi = \frac{xy^3}{30} + \frac{4x^3y}{3000} - \frac{2x^2y^2}{100} + 10y^2$

Las tensiones son:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{xy}{5} - \frac{4x^2}{100} + 20$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{8xy}{1000} - \frac{4y^2}{100}$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{-y^2}{10} - \frac{4x^2}{1000} + \frac{8xy}{100}$$

Y al estar en deformación plana:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x+\sigma_y) = \nu(0'208\cdot xy - 0'04x^2 - 0'04y^2 + 20)$$

Las tensiones así obtenidas satisfacen las ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones si las fuerzas de masa son constantes, sin importar cómo sea ϕ.

2) LADO AD ($x=0$):

$$\sigma_x = 20$$

$$\sigma_y = -\frac{4y^2}{100}$$

$$\tau_{xy} = \frac{-y^2}{10}$$

Y los esfuerzos se obtienen integrando.

$$N = \iint_\Omega \sigma_x \, d\Omega = \int_{y=0}^{y=1} \sigma_x \cdot dy \cdot e = \int_0^1 20000 \cdot dy \cdot 1 = (20000y)\Big|_0^1 = 20000 \text{ KN}$$

$$M = \iint_\Omega \sigma_x (y-0'5)\, d\Omega = \int_{y=0}^{y=1} (\sigma_x \cdot y - 0'5\sigma_x)\, dy \cdot 1 = \int_0^1 (20000y - 10000)\, dy =$$

$$= (10000y^2 - 10000y)\Big|_0^1 = 0 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$Q = \iint_\Omega \tau_{xy}\, d\Omega = \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{-y^2}{10}\right) dy \cdot 1 = \left(\frac{-y^3}{30}\right)\Big|_0^1 = -33'33 \text{ KN}$$

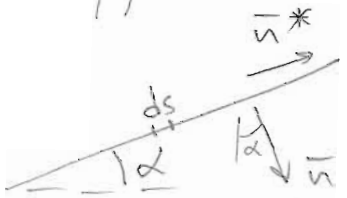
LADO AB ($y = 0'2\,x$)

$$\sigma_x = \frac{xy}{5} - \frac{4x^2}{100} + 20 = \frac{x \cdot 0'2x}{5} - \frac{4x^2}{100} + 20 = 20\ MPa = 20000\ \frac{kN}{m^2}$$

$$\sigma_y = \frac{8xy}{1000} - \frac{4y^2}{100} = \frac{8x \cdot 0'2x}{1000} - \frac{4 \cdot (0'2x)^2}{100} = 0\ MPa = 0\ kN/m^2$$

$$\tau_{xy} = \frac{-y^2}{10} - \frac{4x^2}{1000} + \frac{8xy}{1000} = \frac{-0'04x^2}{10} - \frac{4x^2}{1000} + \frac{8x \cdot 0'2x}{100} = 0'008 \cdot x^2$$

En este lado, las tensiones normales y tangenciales serán (aplicando Cauchy):



$\operatorname{sen}\alpha = 0'1961$

$\cos\alpha = 0'9806$

$dx = ds \cdot \cos\alpha \Rightarrow ds = \dfrac{dx}{0'9806}$

$$\bar{n}^T = [0'1961, -0'9806]$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0'008x^2 & 0 \\ 0'008 \cdot x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \cdot \nu \end{pmatrix} \quad (\text{en MPa})$$

$$\sigma_z = \nu\left(0'208 \cdot x \cdot y - 0'04x^2 - 0'04y^2 + 20\right) = 20 \cdot \nu$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 20 & 0'008 \cdot x^2 & 0 \\ 0'008x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \cdot \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'1961 \\ -0'9806 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3'9224 - 0'00784 \cdot x^2 \\ 0'00157 \cdot x^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y las tensiones normales y tangenciales son:

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = (0'1961, -0'9806, 0) \begin{bmatrix} 3'9224 - 0'00784 \cdot x^2 \\ 0'00157 \cdot x^2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0'7693 - 0'0031 \cdot x^2$$

$$\tau = \bar{n}^{*T} \cdot \bar{t} = (0'9806, 0'1961, 0) \begin{bmatrix} 3'9224 - 0'00784 \cdot x^2 \\ 0'00157 \cdot x^2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3'846 - 0'00738 \cdot x^2$$

Y los esfuerzos se obtienen integrando:

$$N = \iint_\Omega \sigma \cdot d\Omega = \int_{s=0}^{s=L} \sigma \cdot ds \cdot 1 = \int_0^1 (0'7693 - 0'0031 \cdot x^2) \frac{dx}{0'9806} =$$

$$= \int_0^1 (0'7845 - 0'00316\,x^2)\,dx = \left(0'7845 \cdot x - \frac{0'00316}{3} x^3\right)\Big|_0^1 \cdot 1000 = 783'45\ kN$$

$$M = \iint_\Omega -\sigma\left(s - \frac{L}{2}\right) d\Omega = \int_0^1 \left(-0'7693 + 0'0031\, x^2\right)\left(\frac{x}{0'9806} - \frac{1'02}{2}\right) \frac{dx \cdot 1}{0'9806} =$$

$$= \int_0^1 \left(0'003161 \cdot x^3 - 0'001581 \cdot x^2 - 0'78452 \cdot x + 0'3923\right) \frac{dx}{0'9806} =$$

$$= \left(7'902 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 - 5'27 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 0'3923 \cdot x^2 + 0'3923 \cdot x\right)\Big|_0^1 \cdot \frac{1000}{0'9806} = 0 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$Q = \iint_\Omega Z\, d\Omega = \int_0^L \left(3'846 - 0'00738 \cdot x^2\right) ds \cdot 1 = \int_0^1 \left(3'922 - 0'00753 \cdot x^2\right) dx =$$

$$= \left(3'922\, x - 2'509 \cdot 10^{-3}\, x^3\right)\Big|_0^1 \cdot 1000 = 3919'5 \text{ KN}$$

3) La pregunta es en realidad si las tensiones anteriores cumplen la ecuación de compatibilidad.
Vamos a ver si ϕ es biarmónica.

$$\Delta\phi = \sigma_x + \sigma_y = \frac{xy}{5} - \frac{4x^2}{100} + 20 + \frac{8xy}{1000} - \frac{4y^2}{100} = \frac{208\, xy}{1000} - \frac{4x^2}{100} - \frac{4y^2}{100} + 20$$

$$\Delta\left[\sigma_x + \sigma_y\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\sigma_x + \sigma_y\right] = \frac{-8}{100} - \frac{8}{100} = -0'16 \neq 0$$

Por lo tanto, ϕ no es biarmónica. Las tensiones y esfuerzos calculados no corresponden a una solución exacta del problema. Al no cumplir la condición de compatibilidad, las tensiones no proceden de un campo único de deformaciones y no son, por tanto, solución verdadera de ningún problema elástico.

NOTA: Función de Airy en deformación plana

Enunciado (extraído de BREVELAS): Airy2

Una placa rectangular de espesor constante tiene sus vértices en los puntos A(6,4), B(6,-2), C(-4,-2), D(-4,4) (en metros). La placa está sometida a un estado de tensión plana y las expresiones de las tensiones en los bordes son las que siguen:

lado AB: $\sigma_x = y^2 - 36$; $\tau_{xy} = 12 \cdot y$

lado BC: $\sigma_y = x^2 - 4$; $\tau_{xy} = -4 \cdot x$

lado CD: $\sigma_x = y^2 - 16$; $\tau_{xy} = -8 \cdot y$

lado AD: $\sigma_y = x^2 - 16$; $\tau_{xy} = 8 \cdot x$

Sabiendo que la función de Airy es un polinomio, se pide obtener las expresiones de las tensiones en un punto cualquiera de la placa.

Resolución:

Al ser las tensiones de segundo grado, ϕ deberá ser de cuarto grado.

$$\phi = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 + Jx^2 + Kxy + L$$

No se incluyen los términos de primer grado porque de todas formas desaparecerían al derivar dos veces.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Cx^2 + 6Dxy + 12Ey^2 + 2Hx + 6Iy + L \cdot 2$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 12Ax^2 + 6Bxy + 2Cy^2 + 6Fx + 2Gy + J \cdot 2$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -3Bx^2 - C4xy - 3Dy^2 - 2Gx - 2Hy - K$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

- Lado AB ($x=6$)

$$\sigma_x = 72C + 36Dy + 12Ey^2 + 12H + 6Iy + 2L = y^2 - 36$$

$\boxed{E = \frac{1}{12}}$ $\quad 72C + 12H + 2L = -36$ (I) ✓ ; $\quad 36D + 6I = 0$ (II) ✓

$$\tau_{xy} = -108B - 24Cy - 3Dy^2 - 12G - 2Hy - K = 12y$$

$-24C - 2H = 12$ (III) ✓ $\quad \boxed{D = 0} \quad \boxed{I = 0}$

$-108B - 12G - K = 0$ (IV) ✓

• Lado BC $(y = -2)$:

$$\sigma_y = 12Ax^2 - 12Bx + 8C + 6Fx - 4G + 2J = x^2 - 4$$

$\boxed{A = \frac{1}{12}}$ $\quad -12B + 6F = 0$ (V) ✓

$8C - 4G + 2J = -4$ (VI) ✓

$$\tau_{xy} = -3Bx^2 + 8Cx - 12D - 2Gx + 4H - K = -4x$$

$\boxed{B = 0}$ $\boxed{F = 0}$ $\quad 8C - 2G = -4$ (VII) ✓

$-12D + 4H - K = 0$ (VIII) ✓

• Lado CD $(x = -4)$:

$$\sigma_x = 32C - 24Dy + 12Ey^2 - 8H + 6Iy + 2L = y^2 - 16$$

$-24D + 6I = 0$ ✓ $\quad 32C - 8H + 2L = -16$ (IX)

$$\tau_{xy} = -48B + 16Cy - 3Dy^2 + 8G - 2Hy - K = -8y$$

$16C - 2H = -8$ (X) ✓

$-48B + 8G - K = 0$ (XI) ✓

• Lado AD $(y = 4)$:

$$\sigma_y = 12Ax^2 + 24Bx + 32C + 6Fx + 8G + 2J = x^2 - 16$$

$24B + 6F = 0$ ✓ $\quad 32C + 8G + 2J = -16$ (XII) ✓

$$\tau_{xy} = -3Bx^2 - 16Cx - 48D - 2Gx - 8H - K = 8x$$

$-16C - 2G = 8$ (XIII) ✓ $\quad -48D - 8H - K = 0 \Rightarrow 8H + K = 0$ (XIV) ✓

Resolviendo:

$A = \frac{1}{12}$	$G = 0$
$B = 0$	$H = 0$
$C = -\frac{1}{2}$	$I = 0$
$D = 0$	$J = 0$
$E = \frac{1}{12}$	$K = 0$
$F = 0$	$L = 0$

Por tanto:

$$\phi = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{12}y^4$$

Hay que comprobar que $\nabla^4\phi = 0$

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{12}\cdot 24 + \frac{1}{12}24 - \frac{2}{2}4 = 0$$

Por tanto, cumple $\nabla^4\phi = 0$

$$\sigma_x = y^2 - x^2$$

$$\sigma_y = x^2 - y^2$$

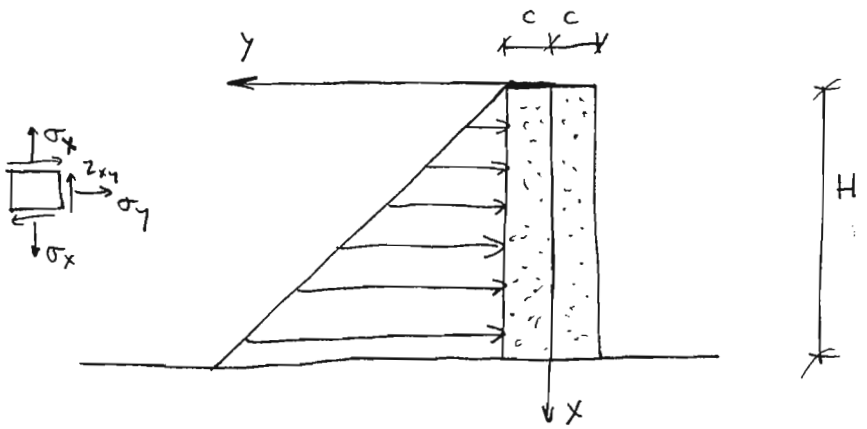
$$\tau_{xy} = 2xy$$

NOTA: Problema donde se utiliza la función de Airy.

Enunciado (extraído de BREVELAS): Airy3

El muro de la figura está sometido en su cara lateral izquierda y desde el borde superior al empuje hidrostático de un líquido de peso específico unidad. Se trata de investigar la validez de la solución en tensiones proporcionada por la siguiente función de Airy:

$$\phi = \frac{x^3 y}{8c}\left(\frac{y^2}{3c^2}-1\right) - \frac{xy}{40c}\left(\frac{y^4}{c^2}-2y^2+c^2\right) - \frac{x^3}{12}$$



Resolución:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{x^3y^3}{24c^3} - \frac{x^3y}{8c} - \frac{xy^5}{40c^3} + \frac{2xy^3}{40c} - \frac{xyc}{40} - \frac{x^3}{12}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y^2}{8c^3} - \frac{x^3}{8c} - \frac{xy^4}{8c^3} + \frac{3xy^2}{20c} - \frac{xc}{40}\right);$$

$$\sigma_x = \frac{x^3y}{4c^3} - \frac{xy^3}{2c^3} + \frac{3xy}{10c}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y^3}{8c^3} - \frac{3x^2y}{8c} - \frac{y^5}{40c^3} + \frac{y^3}{20c} - \frac{yc}{40} - \frac{x^2}{4}\right);$$

$$\sigma_y = \frac{xy^3}{4c^3} - \frac{3xy}{4c} - \frac{x}{2}$$

Para ver si es biarmónica: $\nabla^4\phi = 0$

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

$$\phi = \frac{x^3y^3}{24c^3} - \frac{x^3y}{8c} - \frac{xy^5}{40c^3} + \frac{2xy^3}{40c} - \frac{xyc}{40} - \frac{x^3}{12}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{x^2y^3}{8c^3} - \frac{3x^2y}{8c} - \frac{y^5}{40c^3} + \frac{y^3}{20c} - \frac{yc}{40} - \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{\partial\phi^2}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{4c^3} - \frac{3xy}{4c} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial\phi^3}{\partial x^3} = \frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial\phi^4}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x^3y^2}{8c^3} - \frac{x^3}{8c} - \frac{xy^4}{8c^3} + \frac{3xy^2}{20c} - \frac{xc}{40}$$

$$\frac{\partial\phi^2}{\partial y^2} = \frac{x^3y}{4c^3} - \frac{xy^3}{2c^3} + \frac{3xy}{10c}$$

$$\frac{\partial\phi^3}{\partial y^3} = \frac{x^3}{4c^3} - \frac{3xy^2}{2c^3} + \frac{3x}{10c}$$

$$\frac{\partial\phi^4}{\partial y^4} = \frac{-3xy}{c^3}$$

$$\frac{\partial\phi^3}{\partial x^2\partial y} = \frac{3xy^2}{4c^3} - \frac{3x}{4c}$$

$$\frac{\partial\phi^4}{\partial x^2\partial y^2} = \frac{3xy}{2c^3}$$

Por tanto:

$$\nabla^4\phi = 0 + \frac{2\cdot 3xy}{2c^3} - \frac{3xy}{c^3} = 0$$

Y la función de Airy propuesta es biarmónica.

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{-3x^2y^2}{8c^3} + \frac{3x^2}{8c} + \frac{y^4}{8c^3} - \frac{3y^2}{20c} + \frac{c}{40}$$

Ahora hay que comprobar las condiciones de contorno.

- CARA $y = c \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_y = -x \quad \checkmark \\ \tau_{xy} = 0 \quad \checkmark \end{array} \right.$

- CARA $y = -c \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_y = 0 \quad \checkmark \\ \tau_{xy} = 0 \quad \checkmark \end{array} \right.$

- CARA $x = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_x = 0 \quad \checkmark \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right.$

Esta última condición no se cumple, pues:

$$\tau_{xy}(x=0) = \frac{y^4}{8c^3} - \frac{3y^2}{20c} + \frac{c}{40}$$

Por lo tanto, esta función de Airy da una buena aproximación del estado tensional del muro, pero no exacta.

En la base del muro:

$$Q_y \ (x=H) = \int_{-c}^{+c} \tau_{xy}\, dy = \int_{-c}^{c} \left(\frac{-3H^2y^2}{8c^3} + \frac{3H^2}{8c} + \frac{y^4}{8c^3} - \frac{3y^2}{20c} + \frac{c}{40} \right) dy =$$

$$= \left(-\frac{3H^2y^3}{24c^3} + \frac{3H^2y}{8c} + \frac{y^5}{40c^3} - \frac{y^3}{20c} + \frac{cy}{40} \right) \Bigg|_{-c}^{c} =$$

$$= \left(-\frac{H^2c^3}{8c^3} + \frac{3H^2c}{8c} + \frac{c^5}{40c^3} - \frac{c^3}{20c} + \frac{c^2}{40} \right) - \left(\frac{H^2c^3}{8c^3} - \frac{3H^2c}{8c} - \frac{c^5}{40c^3} + \frac{c^3}{20c} - \frac{c^2}{40} \right)$$

$$\boxed{Q_y \ (x=H) = -\frac{H^2}{4} + \frac{3H^2}{4} + \frac{c^2}{20} - \frac{c^2}{10} + \frac{c^2}{20} = \frac{H^2}{2}} \quad \text{Valor exacto}$$

$$\boxed{-M_z \ (x=H) = \int_{y=-c}^{y=c} \sigma_x (x=H) \cdot y \cdot dy = \frac{1}{6} H^3} \quad \text{Valor exacto}$$

NOTA: Problema en el que se utiliza la función de Airy.

Airy 4.

En los vértices de una placa rectangular de 0.40 x 0.20 metros existen las tensiones que figuran en el siguiente cuadro:

	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
A (0.20, 0.10)	-90	90	120
B (0.20, -0.10)	-90	90	-120
C (-0.20, -0.10)	-90	90	120
D (-0.20, 0.10)	-90	90	-120

Se sabe, además, que en los puntos medios de los lados del contorno de longitud 0.40 metros es σ_y = -30 MPa, y en los correspondientes a los lados de longitud 0.20 metros es σ_x = -120 MPa.

Sabiendo que las leyes de tensiones normales sobre el contorno son parabólicas de segundo grado y que las correspondientes a las tensiones tangenciales son lineales, se pide:

1. Dibujar las fuerzas de superficie sobre el contorno.

2. Determinar la función de Airy y la solución en tensiones que de ella se deduce.

3. Hallar los puntos singulares.

4. Calcular la red de isostáticas y representarlas gráficamente.

Enunciado: Airy 4 (45')

En los vértices de una placa rectangular de 0'40 x 0'20 metros existen las tensiones que figuran en el siguiente cuadro:

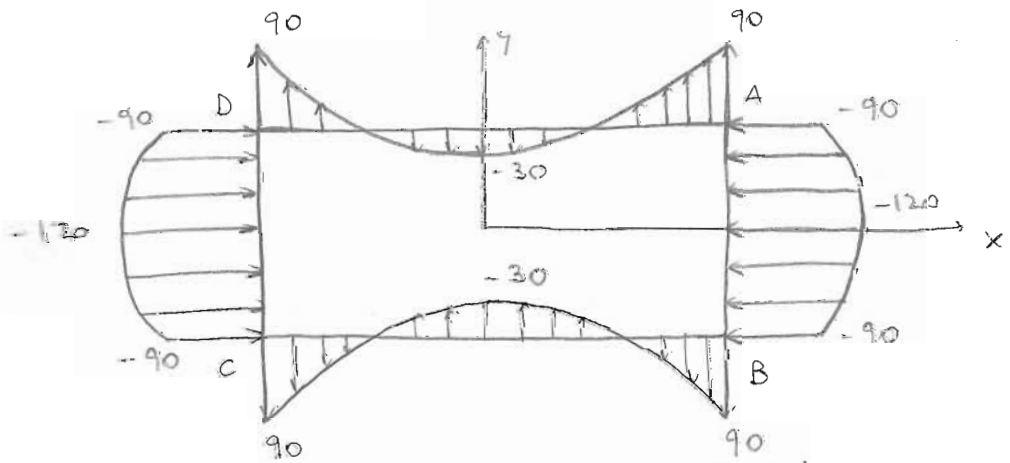
	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
A (0'20, 0'10)	-90	90	120
B (0'20, -0'10)	-90	90	-120
C (-0'20, -0'10)	-90	90	120
D (-0'20, 0'10)	-90	90	-120

Se sabe, además, que en los puntos medios de los lados del contorno de longitud 0'40 metros es $\sigma_y = -30$ MPa, y en los correspondientes a los lados de longitud 0'20 m es $\sigma_x = -120$ MPa. Sabiendo que las leyes de tensiones normales sobre el contorno son parabólicas de segundo grado y que las correspondientes a las tensiones tangenciales son lineales, se pide:

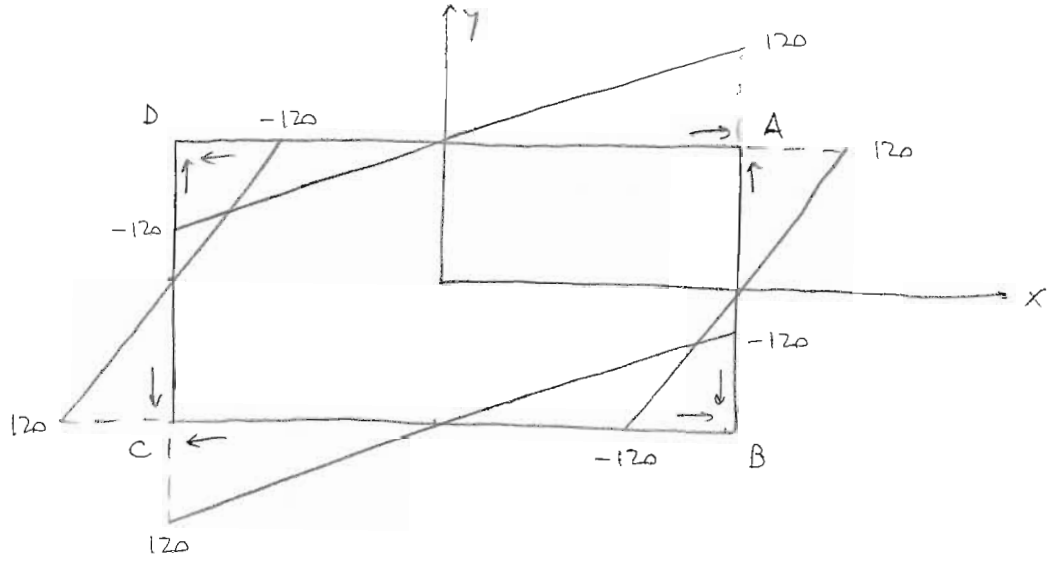
1) Dibujar las fuerzas de superficie sobre el contorno.
2) Determinar la función de Airy y la solución en tensiones que de ella se deduce.
3) Hallar los puntos singulares.
4) Calcular la red de isostáticas y representarlas gráficamente

Resolución:

1) Las fuerzas de superficie son:



TENSIONES NORMALES (MPa)



TENSIONES TANGENCIALES (MPa)

2) Función de Airy. Cogemos una función de 4º grado, ya que las tensiones en los contornos son parabólicas de segundo grado.

$$\phi(x,y) = A x^4 + B x^3 y + C x^2 y^2 + D x y^3 + E \cdot y^4 + F x^3 + G x^2 y + H x y^2 + $$
$$+ I y^3 + J x^2 + K x y + L y^2$$

Se evitan los términos menores de segundo grado, ya que desaparecen al derivar dos veces

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Cx^2 + 6Dxy + 12Ey^2 + 2Hx + 6Iy + 2L$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 12Ax^2 + 6Bxy + 2Cy^2 + 6Fx + 2Gy + 2J$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -3Bx^2 - 4Cxy - 3Dy^2 - 2Gx - 2Hy - K$$

Ahora hay que imponer las condiciones de contorno:

• <u>CARA $x = 0'20$ m</u> : $\sigma_x = 3000 y^2 - 120$ $\qquad \tau_{xy} = 1200 y$

$$\sigma_x = 3000 y^2 - 120 = 2 \cdot C \cdot 0'04 + 6D y \cdot 0'20 + 12 E y^2 + 2H \cdot 0'2 + 6 I y + 2L$$

Igualando coeficientes: $12E = 3000 \rightarrow \boxed{E = 250}$ (I)

(II): $1'2D + 6I = 0$

(III): $0'08C + 0'4H + 2L = -120$

$$\tau_{xy} = 1200\, y = -3B \cdot 0'04 - C \cdot 0'8 \cdot y - 3Dy^2 - 0'4G - 2Hy - K$$

Igualando coeficientes:

$$-3D = 0 \rightarrow \boxed{D = 0} \quad (IV)$$

$$(V): \; 1200 = -0'8C - 2H$$

$$(VI): \; 0 = -0'12B - 0'4G - K$$

• CARA $y = 0'10$ m: $\sigma_y = 3000x^2 - 30$ $\qquad \tau_{xy} = 600x$

$$\sigma_y = 3000x^2 - 30 = 12Ax^2 + 0'6Bx + 0'02C + 6Fx + 0'2G + 2J$$

Igualando coeficientes:

$$3000 = 12A \rightarrow \boxed{A = 250} \quad (VII)$$

$$(VIII): \; 0 = 0'6B + 6F$$

$$(IX): \; -30 = 0'02C + 0'2G + 2J$$

$$\tau_{xy} = 600x = -3Bx^2 - 0'4Cx - 0'03D - 2Gx - 0'2H - K$$

Igualando coeficientes:

$$0 = -3B \rightarrow \boxed{B = 0} \quad (X)$$

$$(XI): \; 600 = -0'4C - 2G$$

$$(XII): \; 0 = -0'03D - 0'2H - K$$

Resolviendo:

$A = 250$	$E = 250$	$I = 0$
$B = 0$	$F = 0$	$J = 0$
$C = -1500$	$G = 0$	$K = 0$
$D = 0$	$H = 0$	$L = 0$

Y la función de Airy queda:

$$\boxed{\phi = 250x^4 - 1500x^2y^2 + 250y^4}$$

Y la solución en tensiones es (en MPa y m)

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 3000\, y^2 - 3000\, x^2 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 3000\, x^2 - 3000\, y^2 \\ \tau_{xy} &= \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 6000\, xy \end{aligned}}$$

Comprobo si ϕ es biarmónica : $\Delta[\sigma_x + \sigma_y] = 0$

$\sigma_x + \sigma_y = 0$ ✓

3) Puntos singulares: $\sigma_x = \sigma_y$; $\tau_{xy} = 0$

$3000\, y^2 - 3000\, x^2 = 3000\, x^2 - 3000\, y^2 \rightarrow y^2 = x^2$

$x \cdot y = 0$

$(x, y) = (0, 0)$

4) Isostáticas: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2}$

$\sigma_x - \sigma_y = 6000\,(y^2 - x^2)$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y^2 - x^2}{2xy}\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

Las dos familias son:

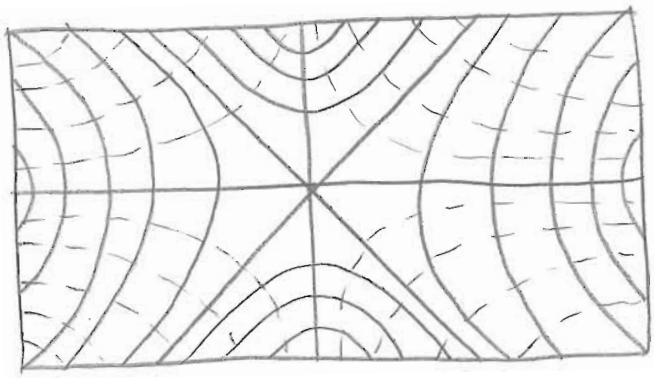
① $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \boxed{y^2 - x^2 = cte}$

② $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x} \Rightarrow \boxed{x \cdot y = cte}$

Resultan, por tanto, dos familias de hipérbolas ortogonales entre sí. Para representarlas en la HP:

HP48: PLOT TYPE: Ps-contour HP:49 2D/3D Type: Ps-contour

En OPTS Introducir las cotas



NOTA: Airy con representación gráfica de isostáticas

Airy 5.

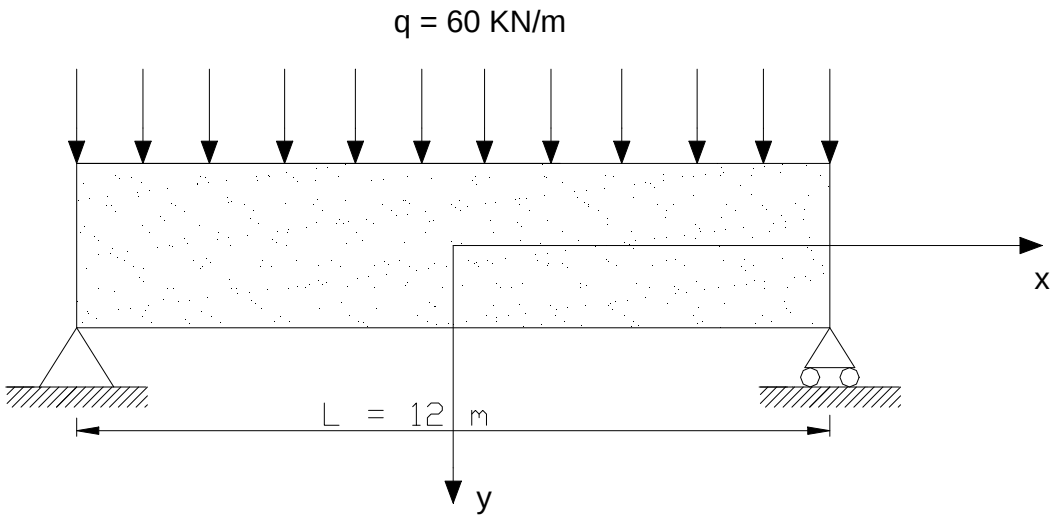
La viga biapoyada de la figura tiene de luz L = 12 m. Su sección es rectangular de ancho b = 0.6 m y canto h = 2.4 m. Está sometida a una sobrecarga uniforme de valor q = 60 kN/m. El eje y es vertical, positivo hacia abajo, y el eje x es horizontal, positivo hacia la derecha.

Se supone que el estado es de tensión plana. Las características mecánicas del material son $E = 2 \cdot 10^4$ MPa, ν = 0.25 y su densidad es nula. Supuesta una función de Airy de la forma:

$$\phi\,(x,y) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \cdot y + C_3 \cdot y^3 + C_4 \cdot x^2 \cdot y^3 + C_5 \cdot y^5$$

Se pide:

1. Obtener los valores de las constantes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.
2. Obtener la expresión del tensor de tensiones en cualquier punto.
3. Obtener la expresión de la deformación longitudinal ε_y.
4. Obtener las tensiones principales en el punto de coordenadas x = 3, y = 0.



Enunciado: Airy 5 (60')

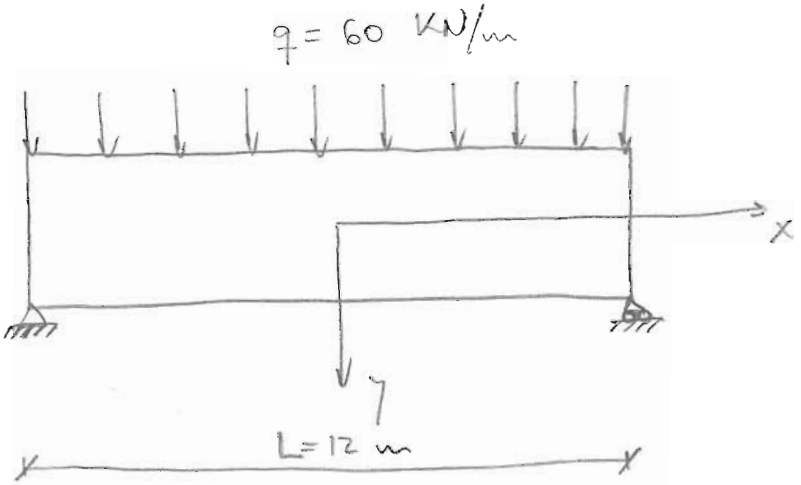
La viga biapoyada de la figura tiene una luz $L = 12$ m. Su sección es rectangular de ancho $b = 0'60$ m y canto $h = 2'4$ m. Está sometida a una sobrecarga uniforme de valor $q = 60 \frac{KN}{m}$. El eje y es vertical, positivo hacia abajo, y el eje x es horizontal, positivo hacia la derecha.

Se supone que el estado es de tensión plana. Las características mecánicas del material son $E = 2 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0'25$ y densidad nula. Supuesta una función de Airy de la forma:

$$\phi(x,y) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 y + C_3 y^3 + C_4 x^2 y^3 + C_5 \cdot y^5$$

Se pide:

1) Obtener los valores de las constantes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5
2) Obtener la expresión del tensor de tensiones en cualquier punto.
3) Obtener la expresión de la deformación longitudinal ε_y.
4) Obtener las tensiones principales en el punto $x = 3$, $y = 0$.



Resolución:

1) Al ser tensión plana: $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$

Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se verifican siempre si la función de Airy es biarmónica

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6C_3 y + 6C_4 x^2 y + 20 C_5 y^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2C_1 + 2C_2 y + 2C_4 y^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2C_2 x - 6C_4 x y^2$$

Hay que comprobar que ϕ es biarmónica.

$$\Delta^2 \phi = \Delta[\sigma_x + \sigma_y] = \Delta\left[6C_3 y + 6C_4 x^2 y + 20 C_5 y^3 + 2C_1 + 2C_2 y + 2C_4 y^3\right] = 0$$

$$12 C_4 y + 120 C_5 y + 12 C_4 y = 0 \rightarrow 2C_4 + 10 C_5 = 0 \rightarrow \boxed{C_4 + 5C_5 = 0} \quad (I)$$

Ahora hay que aplicar las condiciones de contorno.

- CARAS $z = \pm \frac{b}{2}$: $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Por ser tensión plana No saco nada

- CARA $y = \frac{h}{2}$ (CARA INFERIOR): $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \tau_{xy} = 0 = -2C_2 x - 6C_4 x \cdot \frac{h^2}{4} \\ \rightarrow \sigma_y = 0 = 2C_1 + 2C_2 \frac{h}{2} + 2C_4 \cdot \frac{h^3}{8} \\ \rightarrow \tau_{yz} = 0 \checkmark \end{array}$$

por ser tensión plana

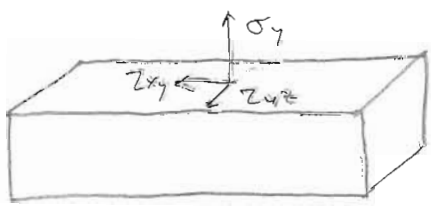
Por lo tanto, saco dos condiciones más:

$$C_2 + \frac{3}{4} h^2 C_4 = 0 \rightarrow 4C_2 + 3h^2 C_4 = 0 \rightarrow \boxed{C_2 + 4'32 C_4 = 0} \quad (II)$$

$$8C_1 + 4C_2 h + C_4 h^3 = 0 \rightarrow \boxed{C_1 + 1'2 C_2 + 1'728 C_4 = 0} \quad (III)$$

- CARA $y = -h/2$ (CARA SUPERIOR) $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Hay una carga repartida por unidad de longitud (ojo, no es una tensión). Suponemos que se reparte uniformemente en toda la anchura.



Por tanto: $\sigma_y = \frac{-q}{b} \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ q/b \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \\ -\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q/b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 2C_2 x + 6C_4 x \frac{h^2}{4} \checkmark \text{ (igual que (II))} \\ \rightarrow -2C_1 + 2C_2 \frac{h}{2} + 2C_4 \frac{h^3}{8} = \frac{q}{b} \\ \rightarrow \tau_{yz} = 0 \checkmark \text{ por ser tensión plana} \end{array}$$

De aquí saco una condición:

$$-8C_1 + 4C_2 h + C_4 h^3 = \frac{4q}{b} \rightarrow \boxed{-C_1 + 1'2\, C_2 + 1'728\, C_4 = 50} \quad (\text{IV})$$

También se podía haber hecho: $\sigma_y \big|_{y=-\frac{h}{2}} = \frac{-q}{b}$ (compresiones)

• CARA $x = \frac{L}{2}$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 6C_3 y + 6C_4 \frac{L^2}{4} y + 20 C_5 y^3 = 0 \\ \rightarrow -2C_2 \frac{L}{2} - 6C_4 \frac{L}{2} y^2 = 0 \\ \rightarrow \tau_{xz} = 0 \checkmark \rightarrow \text{tensión plana} \end{array}$$

Saco dos condiciones:

$$24C_3 + 6C_4 L^2 + 120 C_5 y^2 = 0 \rightarrow 4C_3 + C_4 L^2 + 20 C_5 y^2 = 0 \quad (\text{V})$$

$\forall y;\ C_5 = 0$

$$-C_2 - 3C_4 y^2 = 0 \rightarrow 3C_2 + 3C_4 y^2 = 0 \quad (\text{VI}) \quad \forall y \rightarrow C_2 = C_4 = 0$$

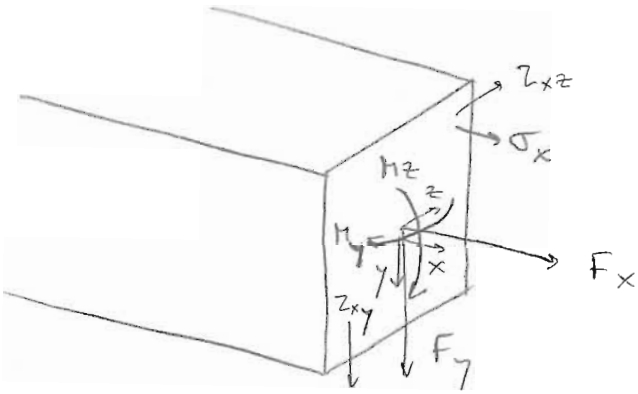
Resolviendo el sistema $\forall y$ queda: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$

Parece ser que en el examen aclararon por los altavoces lo siguiente:

"Se recomienda imponer en los bordes $x = \pm \frac{L}{2}$ las siguientes condiciones de contorno.

- Las tensiones normales σ_x no serán nulas sobre las caras $x = \pm \frac{L}{2}$, pero sí el axil y el momento resultante.
- La resultante de las tensiones tangenciales que actúan en las caras $x = \pm \frac{L}{2}$ es igual a la reacción que producen las cargas exteriores.

Por lo tanto, las ecuaciones (V) y (VI) cambian:



$x = 6$ m

$$F_x = 0 = \iint_\Omega \sigma_x \, d\Omega = \int_{z=-0'3}^{z=0'3} \int_{y=-1'2}^{y=1'2} \left[6 C_3 y + 216 C_4 y + 20 C_5 y^3 \right] dz\, dy =$$

$$= \int_{-0'3}^{0'3} \left[3 C_3 y^2 + 108 C_4 y^2 + 5 C_5 y^4 \right] \Big|_{-1'2}^{1'2} dz \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$F_y = \iint_\Omega \tau_{xy} \, d\Omega = \frac{-qL}{2} = -360 = \int_{-0'3}^{0'3} \int_{-1'2}^{1'2} \left[-12 C_2 - 36 C_4 y^2 \right] dz\, dy =$$

$$= \int_{-0'3}^{0'3} \left[-14'4 C_2 - 20'736 C_4 - 14'4 C_2 - 20'736 C_4 \right] dz = -17'28 C_2 - 24'883 \cdot C_4$$

$$\boxed{C_2 + 1'44 C_4 = 20'833} \quad (V)$$

$$M_y = \iint_\Omega \sigma_x \cdot z \, d\Omega = 0 = \int_{-0'3}^{0'3} \int_{-1'2}^{1'2} \left[6 C_3 y z + 216 C_4 y z + 20 C_5 y^3 z \right] dz\, dy =$$

$$= 0 \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$M_z = -\iint_\Omega \sigma_x \, y \, d\Omega = 0 = -\int_{-0'3}^{0'3} \int_{-1'2}^{1'2} \left[6 C_3 y^2 + 216 C_4 y^2 + 20 C_5 y^4 \right] dz\, dy =$$

$$= -4'1472 \cdot C_3 - 149'3 C_4 - 11'944 \cdot C_5 = 0$$

$$\boxed{C_3 + 36 C_4 + 2'88 C_5 = 0} \quad (VI)$$

Resolviendo con las ecuaciones (I), (II), (IV), (V) y (VI) y comprobando que se cumple para la 3, se tiene (ojo, la (VI) es la única que tiene componente en C_3, por lo que hay que meterla obligatoriamente o si no da $C_3 = 0$):

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= -25 \\ c_2 &= 31'25 \\ c_3 &= 256'25 \\ c_4 &= -7'234 \\ c_5 &= 1'447 \end{aligned}}$$

2) Tensor de tensiones en cualquier punto.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1537'5 \cdot y - 43'404\, x^2 y + 28'94\, y^3 & -62'5\, x + 43'404 \cdot x \cdot y^2 \\ -62'5\, x + 43'404\, x y^2 & -50 + 62'5\, y - 14'468 \cdot y^3 \end{bmatrix} \frac{KN}{m^2}$$

3)

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu \sigma_x\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^7}\left[-50 + 62'5 y - 14'468 y^3 - 0'25\left(1537'5\, y - 43'404 x^2 y + 28'94\, y^3\right)\right]$$

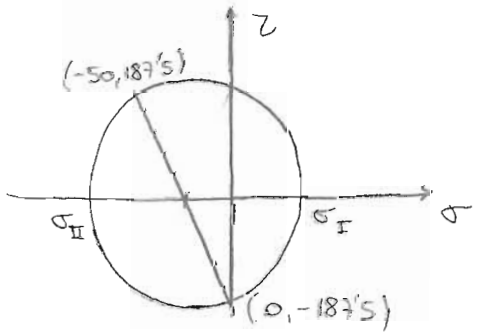
Simplificando queda

$$\boxed{\varepsilon_y = -2'5 \cdot 10^{-6} - 1'609 \cdot 10^{-5}\, y - 1'085 \cdot 10^{-6}\, y^3 + 5'426 \cdot 10^{-7}\, x^2 y}$$

4) Tensiones principales en (3,0). El tensor de tensiones es

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & -187'5 \\ -187'5 & -50 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma_I &= 164'16\ KN/m^2 \\ \sigma_{II} &= -214'16\ KN/m^2 \end{aligned}}$$

Con el círculo de Mohr.



NOTA: Función de Airy en tensión plana.

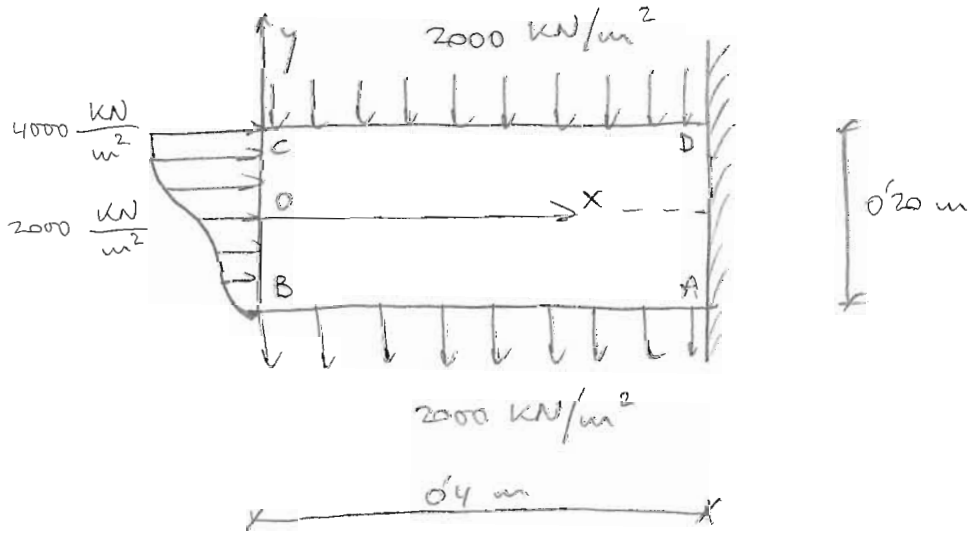
Enunciado: Airy 6 (60')

Sobre el contorno de la ménsula de la figura actúan únicamente las tensiones normales que se indican. En el lado BC la variación es parabólica de tercer grado. Sabiendo que la función de Airy referida a los ejes de figura es de la forma

$$\phi(x,y) = a x^2 y + b x^2 y^3 + c y^2 + d y^5$$

y que no se tiene en cuenta el peso propio, se pide:

1) Expresiones de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ con los valores exactos de los coeficientes
2) Coordenadas de los puntos singulares.
3) Abcisa del punto G sobre la recta $y=0$, en el cual el ángulo que forma σ_I con la dirección positiva del eje x vale $3\pi/8$
4) Valor y direcciones de la tensión tangencial máxima en el punto G. Se hará un croquis con sus direcciones y sentidos, en el que se acotarán los ángulos que forman con el eje x.



Resolución:

1) Debe verificarse:
- Equilibrio en tensiones. ✓
- Compatibilidad interna de deformaciones (✓ si ϕ es biarmónica)
- Condiciones de contorno.

Las tensiones son: $\phi = ax^2y + bx^2y^3 + cy^2 + dy^5$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 6bx^2y + 2c + 20dy^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2ay + 2by^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \cancel{f_x}^{\,0}\cdot y - \cancel{f_y}^{\,0}\cdot x = -2ax - 6bxy^2$$

Para que ϕ sea biarmónica: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)[\sigma_x + \sigma_y] = 0$

$$\sigma_x + \sigma_y = 6bx^2y + 2c + y^3(20d + 2b) + 2ay$$

$$\Delta[\sigma_x + \sigma_y] = 12by + 6y(20d + 2b) = 24by + 120yd = y(24b + 120d) = 0$$

Queda:

$$24b + 120d = 0 \longrightarrow \boxed{b + 5d = 0} \quad (I)$$

Ahora hay que utilizar las condiciones de contorno:

• CARA SUPERIOR: $y = 0'1$ $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = 0 = -2ax - 6bx\cdot 0'1^2 \longrightarrow \boxed{a + 0'03b = 0} \quad (II)$$

$$\sigma_y = 2\cdot a\, 0'1 + 2b\cdot 0'1^3 = -2000 \longrightarrow \boxed{a + 0'01\cdot b = -10000} \quad (III)$$

• CARA INFERIOR: $y = -0'1$ $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{bmatrix}$$

$\tau_{xy} = 0 = -2ax - 0'06\,bx \longrightarrow a + 0'03\,b = 0$ (igual que (II))

$\sigma_y = 2000 = -0'2a - 0'002b \longrightarrow a + 0'01 \cdot b = -10000$ (igual que (III))

• CARA $x=0$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{t}_c = \begin{bmatrix} 4000 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{t}_o = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix}$

– Punto c: $(x=0, y=0'1)$ $\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \rightarrow \begin{bmatrix} 4000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{bmatrix}$

$\sigma_x = -4000 = 2c + 20 \cdot d \cdot 0'1^3 \rightarrow \boxed{c + 0'01 \cdot d = -2000}$ (IV)

$\tau_{xy} = 0 = 0$ ✓

– Punto o: $(x=0, y=0)$ $\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \rightarrow \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{bmatrix}$

$\sigma_x = -2000 = 2c \rightarrow \boxed{c = -1000}$ (V)

$\tau_{xy} = 0 = 0$

Resolviendo con (I), (II), (III) y (IV) se tiene.

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -15.000 \\ b &= 500.000 \\ c &= -1.000 \\ d &= -100.000 \end{aligned}}$$

Y se cumple (V)

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= 3 \cdot 10^6 x^2 y - 2 \cdot 10^6 y^3 - 2000 \\ \sigma_y &= -3 \cdot 10^4 \cdot y + 10^6 \cdot y^3 \\ \tau_{xy} &= 3 \cdot 10^4 \cdot x - 3 \cdot 10^6 \cdot x \cdot y^2 \end{aligned}}$$

2) Puntos singulares

$\sigma_x = \sigma_y \rightarrow 3 \cdot 10^6 x^2 y - 2\,10^6 y^3 - 2000 = -3 \cdot 10^4 y + 10^6 y^3$ (I)

$\tau_{xy} = 0 \rightarrow 3 \cdot 10^4 x - 3 \cdot 10^6 x y^2 = 0$ (II) $\rightarrow \begin{cases} y = \pm 0'1 \text{ m} \\ x = 0 \end{cases}$

(I): $3000\,x^2 y - 2000\,y^3 - 2 = -30\,y + 1000\,y^3$

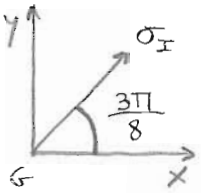
$y = 0'1 \rightarrow x^2 = 6'667 \cdot 10^{-3} \rightarrow x = \pm 0'08165$ m ($x = -0'08165$ está fuera de la loja)

$y = -0'1 \rightarrow x^2 = -6'667 \cdot 10^{-3} \rightarrow$ COMPLEJOS

Por lo tanto, el punto singular es: $\boxed{(0'08165,\ 0'1)}$

Si $x = 0 \rightarrow$ (I) $3000\,y^3 - 30\,y + 2 = 0 \rightarrow y = -0'124$ m (fuera de la loja)
+ dos raíces complejas.

3)



$$\bar{n}_I = \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{8} \\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'3827 \\ 0'9239 \end{bmatrix}$$

Sobre el punto G, en la dirección $\bar{n}_I$, sólo hay tensión normal

$$\bar{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'3827 \\ 0'9239 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'3827\,\sigma_x + 0'9239\,\tau_{xy} \\ 0'3827\,\tau_{xy} + 0'9239\,\sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \sigma_I \cdot \bar{n}_I = \begin{bmatrix} 0'3827 \cdot \sigma_I \\ 0'9239 \cdot \sigma_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'3827\,\sigma_x + 0'9239\,\tau_{xy} \\ 0'3827\,\tau_{xy} + 0'9239 \cdot \sigma_y \end{bmatrix}$$

en $y = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_x = -2000 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 30000 \cdot x \end{array} \right. \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} -766 + 27720\,x \\ 11490 \cdot x \end{bmatrix}$

Entonces:

(I): $-766 + 27720 \cdot x = 0'3827 \cdot \sigma_I$

(II): $11490 \cdot x = 0'9239 \cdot \sigma_I \rightarrow \sigma_I = 12436'41 \cdot x$

Sustituyendo en (I):

$$-766 + 27720 \cdot x = 4759'41 \cdot x$$

$$\boxed{x = 3'333 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

4) $\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left[\sigma_I - \sigma_{II}\right]$

El tensor de tensiones en G es:

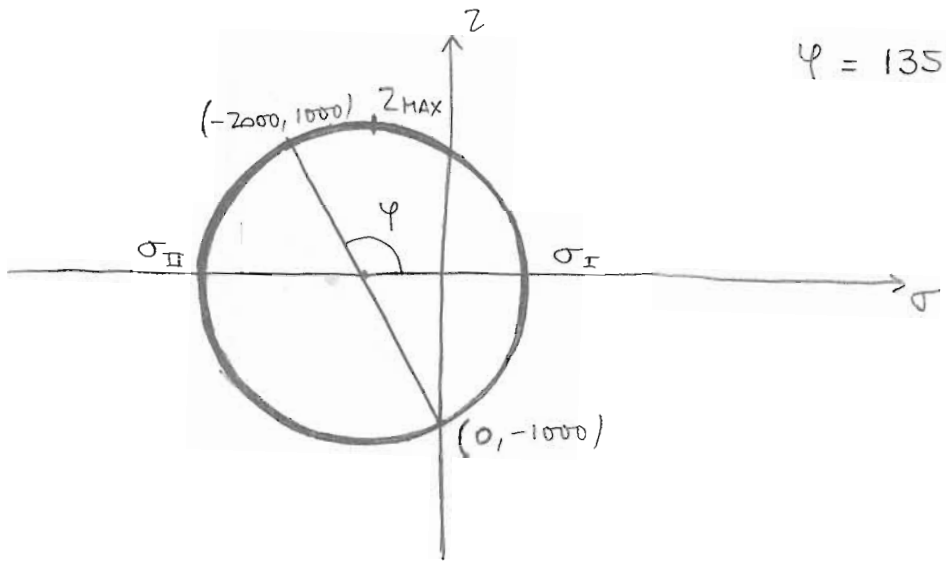
$$T^G = \begin{bmatrix} -2000 & 1000 \\ 1000 & 0 \end{bmatrix} \quad (KN/m^2)$$

Las tensiones principales y sus direcciones son:

$$\sigma_I = 414'21 \ KN/m^2 \rightarrow \bar{n}_I = \begin{bmatrix} 0'3827 \\ 0'9239 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -2414'21 \ KN/m^2 \rightarrow \bar{n}_{II} = \begin{bmatrix} 0'9239 \\ -0'3827 \end{bmatrix}$$

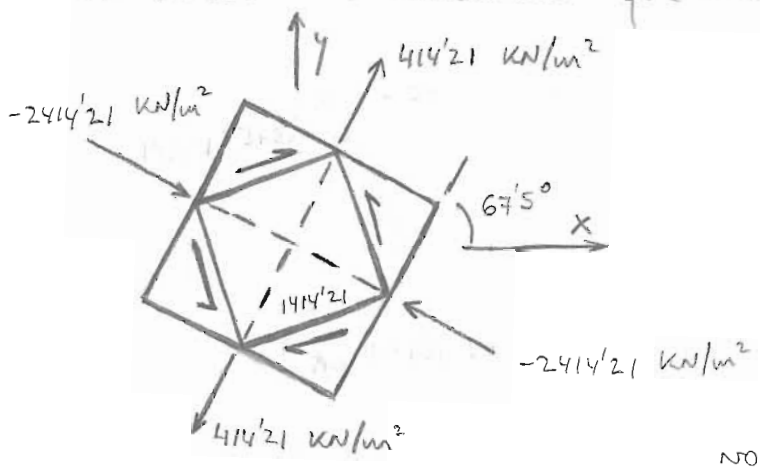
Con el círculo de Mohr:



$\varphi = 135° \rightarrow \frac{\varphi}{2} = 67'5° = \frac{3\pi}{8}$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left[414'21 + 2414'21\right] = 1414'21 \ KN/m^2}$$

Y en el sólido elemental quedarán:



NOTA: Airy

Airy 7.

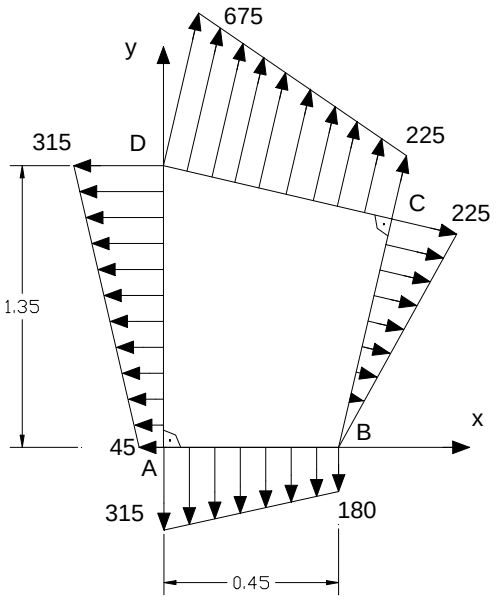
En la pieza ABCD de la figura, los ángulos de los vértices A y C son rectos. Los lados BC y CD son iguales. El cuadrilátero está sometido a un estado de tensión plana del que se sabe que sobre su contorno actúan las presiones normales que se indican en la figura, y además las presiones tangenciales siguientes:

- En el lado AB varían linealmente, sin cambio de signo, entre τ_A = 180 MPa y τ_B = 90 MPa.
- En AD son constantes, de valor a determinar.
- En los lados BC y CD son nulas.

Todas las tensiones y presiones están dadas en MPa y las dimensiones en metros. Se sugiere emplear una función de Airy polinómica de tercer grado. Se pide:

1. Valor de las presiones tangenciales que actúan exteriormente sobre el lado AD, indicando su sentido.
2. Expresiones de σ_x, σ_y y τ_{xy} en un punto cualquiera de ABCD.
3. Coordenadas de los puntos singulares, si los hubiere.
4. Ecuación de la familia de isostáticas envolvente de σ_I.
5. Deducir el cambio unitario de volumen que se produciría en el cuadrilátero ABCD si sólo actuasen las presiones tangenciales del enunciado.

(Examen de septiembre de 2002)



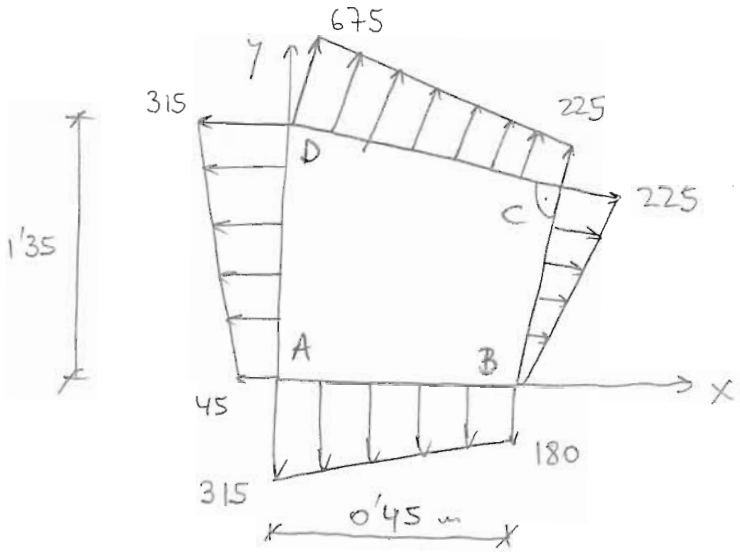
Enunciado: **EXAMEN SEPTIEMBRE 2002** Airy 7

En la pieza ABCD de la figura, los ángulos de los vértices A y C son rectos. Los lados BC y CD son iguales. El cuadrilátero está sometido a un estado de tensión plana del que se sabe que sobre su contorno actúan las presiones normales que se indican en la figura, y además las presiones tangenciales siguientes.

- En el lado AB varían linealmente, sin cambio de signo, entre $\tau_A = 180$ MPa y $\tau_B = 90$ MPa.
- En AD son constantes, de valor a determinar.
- En los lados BC y CD son nulas.

Todas las tensiones y presiones están dadas en MPa y las dimensiones en metros. Se sugiere emplear una función de Airy polinómica de tercer grado. Se pide:

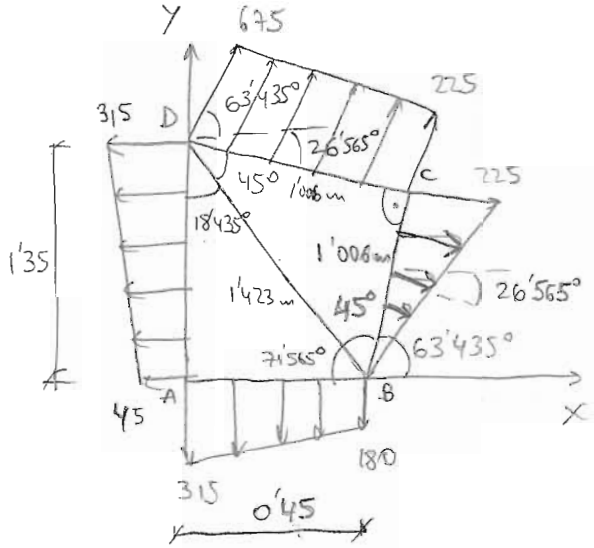
1) Valor de las presiones tangenciales que actúan exteriormente sobre el lado AD, indicando su sentido.
2) Expresiones de σ_x, σ_y y τ_{xy} en un punto cualquiera de ABCD.
3) Coordenadas de los puntos singulares, si los hubiere.
4) Ecuación de la familia de isostáticas envolvente de σ_I.
5) Deducir el cambio unitario de volumen que se produciría en el cuadrilátero ABCD si sólo actuasen las presiones tangenciales del enunciado.



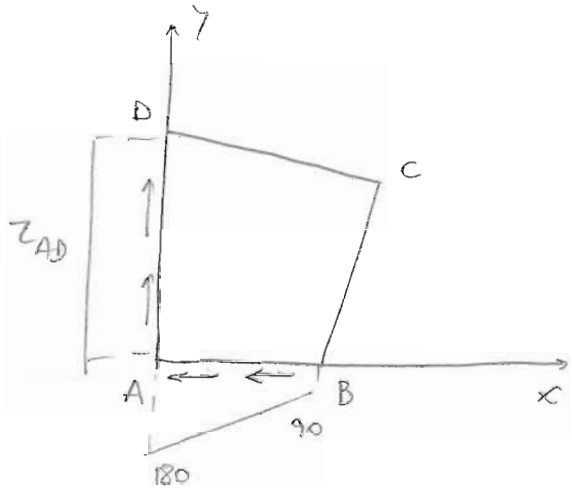
Resolución:

1) Al ser tensión plana $\left| \begin{array}{l} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$

Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se verifican siempre si la función de Airy es biarmónica.
Para ver las tensiones tangenciales que actúan sobre el lado AD, se aplica equilibrio de fuerzas exteriores.



TENSIONES NORMALES



TENSIONES TANGENCIALES

Tanto en AB como en AD no conocemos el signo de las tensiones tangenciales

$$\Sigma H = 0 \rightarrow -\frac{45+315}{2}\,1'35 + \frac{675+225}{2}\cdot 1'006\cdot\cos(63'435°) + \frac{1}{2}\,225\cdot 1'006\cdot\cos(26'565°) =$$

$$= 60'75 = \frac{180+90}{2}\cdot 0'45$$

Por lo tanto, la tensión tangencial en AB tiene el signo pintado

$$\Sigma V = 0 \rightarrow \frac{675+225}{2}\cdot 1'006\cdot \text{sen}(63'435°) - \frac{1}{2}\,225\cdot 1'006\cdot \text{sen}(26'565°) -$$

$$- \frac{315+180}{2}\cdot 0'45 = 242'9191$$

Luego: $\boxed{\tau_{AD} = \frac{-242'9191}{1'35} = -180 \text{ MPa}}$ (o sea, **180 MPa** en sentido contrario al indicado)

2) Expresiones de σ_x, σ_y y τ_{xy}. Nos dice el enunciado que utilicemos una función de Airy polinómica de 3er grado

$$\phi(x,y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J$$

Las expresiones de las tensiones son:

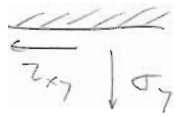
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Cx + 6Dy + 2G$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6Ax + 2By + 2E$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2Bx - 2Cy - F$$

Se aplican las condiciones de contorno:

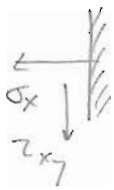
• CARA $y=0$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{bmatrix}$



$$\sigma_y = 315 - 300 \cdot x = 6Ax + 2E \longrightarrow \left| \begin{array}{l} A = -50 \\ E = 157'5 \end{array} \right.$$

$$\tau_{xy} = 180 - 200 \cdot x = -2Bx - F \longrightarrow \left| \begin{array}{l} B = 100 \\ F = -180 \end{array} \right.$$

• CARA $x=0$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{bmatrix}$



$$\sigma_x = 45 + 200 \cdot y = 6Dy + 2G \longrightarrow \left| \begin{array}{l} D = \frac{100}{3} \\ G = 22'5 \end{array} \right.$$

$$\tau_{xy} = 180 = -2Cy - F \longrightarrow \left| \begin{array}{l} C = 0 \\ F = -180 \end{array} \right. \checkmark$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_x = 200 \cdot y + 45 \\ \sigma_y = -300 \cdot x + 200 \cdot y + 315 \\ \tau_{xy} = -200 \cdot x + 180 \end{array}}$$

(en MPa con las coordenadas en m)

Vamos a comprobar si la función de Airy es biarmónica:

$$\Delta\phi = \sigma_x + \sigma_y = -300x + 400y + 360$$

Al no haber componentes en x^2, y^2 o superiores: $\Delta^2\phi = 0$

Por lo tanto, ϕ es biarmónica

3) Puntos singulares: $\left| \begin{array}{ll} \sigma_x = \sigma_y & (I) \\ \tau_{xy} = 0 & (II) \end{array} \right.$

(I) $\cancel{200y} + 45 = -300x + \cancel{200y} + 315 \rightarrow 300x = 270 \rightarrow x = 0'9$ m

(II) $-200x + 180 = 0 \rightarrow x = 0'9$ igual que (I)

Por lo tanto, el único punto singular es el C.

4) Ecuación de la familia de isostáticas envolvente de σ_I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2}$$

Sustituyendo las expresiones de las tensiones, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-200y + 45 + 300x - 200y - 315)}{-400x + 360} + \sqrt{1 + \left(\frac{300x - 270}{-400x + 360}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{270 - 300x}{360 - 400x} + \frac{450 - 500x}{360 - 400x} = \frac{720 - 800x}{360 - 400x} = 2$$

$$dy = 2 \cdot dx \rightarrow \int dy = \int 2 \cdot dx \rightarrow \boxed{y = 2x + C}$$ Rectas paralelas al lado BC

5) Cambio unitario de volumen si sólo actúan tensiones tangenciales.

deformación cúbica: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} s = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

Como no hay tensiones normales: $s = 0 \rightarrow e = 0$

No hay cambio unitario de volumen.

Además, sólo con las τ del enunciado, la pieza no estaría en equilibrio de cargas

NOTA: Airy en tensión plana

Enunciado: Airy 8

La laja rectangular de la figura se encuentra solicitada a la tracción de las fuerzas p repartidas en el contorno según una ley parabólica. Se desea conocer la distribución de tensiones en la laja. Para ello se supone que la función de Airy es:

$$\phi_0 = \frac{1}{2} p_0 y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6a^2}\right)$$

Se pide:

1) ¿Es adecuada esta función ϕ_0 como función de tensiones? Expresar todas las condiciones que debe satisfacer, indicando cuáles cumple y cuáles no.

2) Se utiliza el método de Ritz considerando el desarrollo siguiente para la función de tensiones:

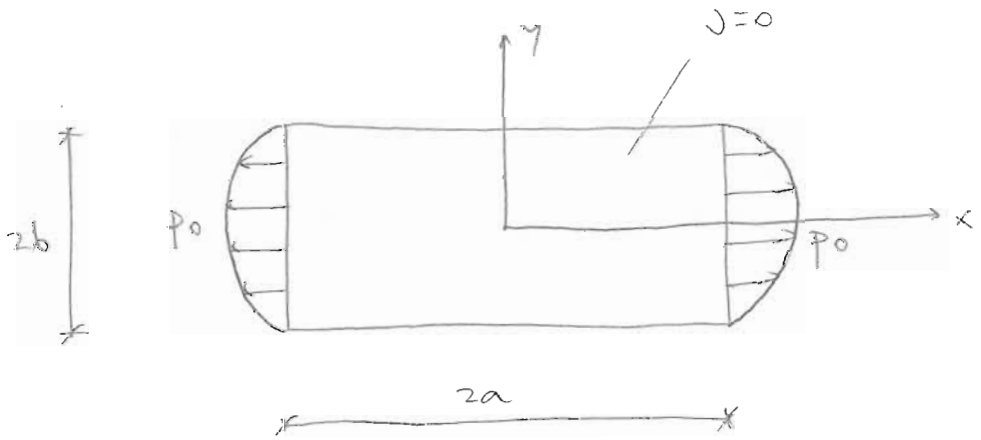
$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \quad \text{con } \phi_1 = A(x^2-a^2)^2(y^2-a^2)^2$$

Justificar el desarrollo de esta función ϕ.

3) Determinar el valor de la constante A.

4) Calcular la distribución de tensiones a lo largo de los ejes $x=0$ e $y=0$.

5) Si se desease obtener una mayor precisión en el cálculo, ¿qué desarrollo para la función ϕ habría que considerar para el método de Ritz?



Resolución:

1) Para ser solución del problema, la función ϕ_0 debe ser biarmónica y satisfacer las condiciones de contorno.

$$\phi_0 = \frac{1}{2} p_0 y^2 - \frac{1}{12 a^2} p_0 \cdot y^4$$

Las tensiones son:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} = p_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Delta \phi_0 = \sigma_x + \sigma_y = p_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

$$\Delta^2 \phi_0 = \Delta [\sigma_x + \sigma_y] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)[\sigma_x + \sigma_y] = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[p_0\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\right]$$

$$\Delta^2 \phi_0 = \frac{-2 p_0}{a^2} \neq 0$$

Por lo tanto, no es biarmónica. Vamos a ver ahora qué pasa con las condiciones de contorno.

• CARA $y = b$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Airy}} \bar{t} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\tau_{xy} = 0$ ✓

$\sigma_y = 0$ ✓

Lo mismo se cumple en la cara $y = -b$

• CARA $x = a$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Airy}} \bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\sigma_x = p_0 \left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right] = p_0 \left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right] \longrightarrow a = b$$

$\tau_{xy} = 0$ ✓

Cumple las condiciones de contorno si $a = b$.

2) La función ϕ es ahora:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 = \frac{1}{2} p_0 y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6a^2}\right) + A(x^2-a^2)^2 (y^2-a^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} p_0 y^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 y^4}{a^2} + A(x^4 - 2a^2x^2 + a^4)(y^4 - 2a^2y^2 + a^4) =$$

$$= \frac{1}{2} p_0 y^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 y^4}{a^2} + A\left[x^4y^4 - 2a^2y^2x^4 + a^4x^4 - 2a^2x^2y^4 + \right.$$

$$\left. + 4a^4x^2y^2 - 2a^6x^2 + a^4y^4 - 2a^6y^2 + a^8\right]$$

Vamos a ver si ϕ es biarmónica:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = p_0 - \frac{p_0 y^2}{a^2} + A\left[12x^4y^2 - 4a^2x^4 - 24a^2x^2y^2 + \right.$$

$$\left. + 8a^4x^2 + 12a^4y^2 - 4a^6\right]$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = A\left[12x^2y^4 - 24a^2x^2y^2 + 12a^4x^2 - 4a^2y^4 + 8a^4y^2 - 4a^6\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = A\left[-16x^3y^3 + 16a^2yx^3 + 16a^2xy^3 - 16a^4xy\right]$$

Por tanto:

$$\sigma_x + \sigma_y = p_0 - \frac{p_0 y^2}{a^2} + A\left[12x^4y^2 - 4a^2x^4 - 48a^2x^2y^2 + 20a^4x^2 + \right.$$

$$\left. + 20a^4y^2 - 4a^6 + 12x^2y^4 - 4a^2y^4 - 4a^6\right]$$

Entonces:

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2(\nabla^2 \phi) = \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)[\sigma_x + \sigma_y] =$$

$$= A\left[144x^2y^2 - 48a^2x^2 - 96a^2y^2 + 40a^4 + 24y^4\right] - \frac{2p_0}{a^2}$$

$$+ A\left[24x^4 - 96a^2x^2 + 40a^4 + 144x^2y^2 - 48a^2y^2\right] \neq 0$$

Esta función de tensiones tampoco es biarmónica.

Vamos a ver qué sucede con las condiciones de contorno

• CARA $y=b$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Airy} \bar{t} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\tau_{xy} = A\left[-16x^3b^3 + 16a^2bx^3 + 16a^2xb^3 - 16a^4xb\right] = 0 \quad \text{si } a=b \checkmark$$

$$\sigma_y = A\left[12x^2b^4 - 24a^2x^2b^2 + 12a^4x^2 - 4a^2b^4 + 8a^4b^2 - 4a^6\right] = 0 \quad \text{si } a=b \checkmark$$

Lo mismo sucede en $y=-b$

• CARA $x=a$: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Airy} \bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\sigma_x = p_0\left[1-\frac{y^2}{b^2}\right] = p_0 - \frac{p_0 y^2}{a^2} + A\left[12a^4y^2 - 4a^6 - 24a^4y^2 + 8a^6 + 12a^4y^2 - 4a^6\right]$$

se cumple si $a=b$ ✓

$$\tau_{xy} = A\left[-16a^3y^3 + 16a^5y + 16a^3y^3 - 16a^5y\right] = 0 \checkmark$$

Por lo tanto, se cumplen las condiciones de contorno si $a=b$.
Entonces, será mejor función la que tenga una energía potencial total menor

$$V = U - W$$

Como W no depende de ϕ, la energía potencial total será menor cuanto menor sea la energía elástica de deformación U.

$$U = \frac{1}{2}\iint_\Omega (\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}) \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} e \, d\Omega =$$

$$= \frac{e}{2}\int_{x=-a}^{x=a}\int_{y=-a}^{y=a} (\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}) \begin{bmatrix} \sigma_x/E \\ \sigma_y/E \\ 2\tau_{xy}/E \end{bmatrix} dy\, dx =$$

$$= \frac{e}{2E}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau_{xy}^2)\, dy\, dx$$

Sustituyendo los valores de σ_x, σ_y y τ_{xy} en la expresión de U e integrando, queda (para ϕ):

$$U = 26'7494 \frac{A^2 a^{14}}{E} - 2'2756 \frac{A \cdot a^8 p_0}{E} + 1'0667 \cdot \frac{a^2 p_0^2}{E}$$

El mínimo se obtiene derivando respecto de A.

$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0 = 53'4988 \frac{A \cdot a^{14}}{E} - 2'2756 \frac{a^8 p_0}{E} \rightarrow A = 4'2536 \cdot 10^{-2} \frac{p_0}{a^6}$$

Sustituyendo en la expresión de U, se tiene:

$$U = 1'0183 \cdot \frac{a^2 \cdot p_0^2}{E}$$

Si se hace lo mismo para ϕ_0 queda $U = 1'0667 \cdot \frac{a^2 p_0^2}{E}$

Por lo tanto ϕ es mejor que ϕ_0.

3) $\boxed{A = 4'2536 \cdot 10^{-2} \frac{p_0}{a^6}}$

4) Distribución de tensiones en los ejes $x=0$ e $y=0$.

• EJE $x=0$: Particularizando las expresiones de las tensiones:

$$\boxed{\sigma_x} = p_0 - \frac{p_0 y^2}{a^2} + A\left[12a^4y^2 - 4a^6\right] =$$

$$= p_0 - \frac{p_0 y^2}{a^2} + 4'2536 \cdot 10^{-2} \frac{p_0}{a^6}\left[12a^4y^2 - 4a^6\right] =$$

$$= p_0 - \frac{p_0 y^2}{a^2} + 0'5104 \cdot \frac{p_0 y^2}{a^2} - 0'1701 \cdot p_0 = \boxed{0'8299 p_0 - 0'4896 \frac{p_0 y^2}{a^2}}$$

$$\boxed{\sigma_y} = A\left[-4a^2y^4 + 8a^4y^2 - 4a^6\right] = 4'2536 \cdot 10^{-2} \frac{p_0}{a^6}\left[-4a^2y^4 + 8a^4y^2 - 4a^6\right] =$$

$$= \boxed{-0'1701 \frac{p_0 y^4}{a^4} + 0'3403 \cdot \frac{p_0 y^2}{a^2} - 0'1701 p_0}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = A\,[\,0\,] = 0}$$

• EJE $y=0$:

$$\boxed{\sigma_x} = p_0 + 4'2536 \cdot 10^{-2} \frac{p_0}{a^6}\left[-4a^2x^4 + 8a^4x^2 - 4a^6\right] =$$

$$= p_0 - 0'1701 \frac{p_0 \cdot x^4}{a^4} + 0'3403 \cdot \frac{p_0 x^2}{a^2} - 0'1701 \cdot p_0 =$$

$$\boxed{= 0'8299\, p_0 - 0'1701 \cdot \frac{p_0 x^4}{a^4} + 0'3403 \frac{p_0 x^2}{a^2}}$$

$$\boxed{\sigma_y} = 4'2536 \cdot 10^{-2} \frac{p_0}{a^6}\left[12a^4x^2 - 4a^6\right] = \boxed{0'5104 \frac{p_0 x^2}{a^2} - 0'1701\, p_0}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = 0}$$

5) Si se deseare mayor precisión en los cálculos habría que tomar una función de Airy del tipo:

$$\phi = \phi_0 + A \cdot \phi_1 + B \cdot \phi_2 + C\,\phi_3 + \dots$$

Que debe satisfacer las condiciones de contorno. Para determinar las constantes A, B, C... se hace:

$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0 \;,\quad \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \;,\quad \frac{\partial U}{\partial C} = 0 \;\dots$$

Las funciones ϕ_i podrían ser las siguientes:

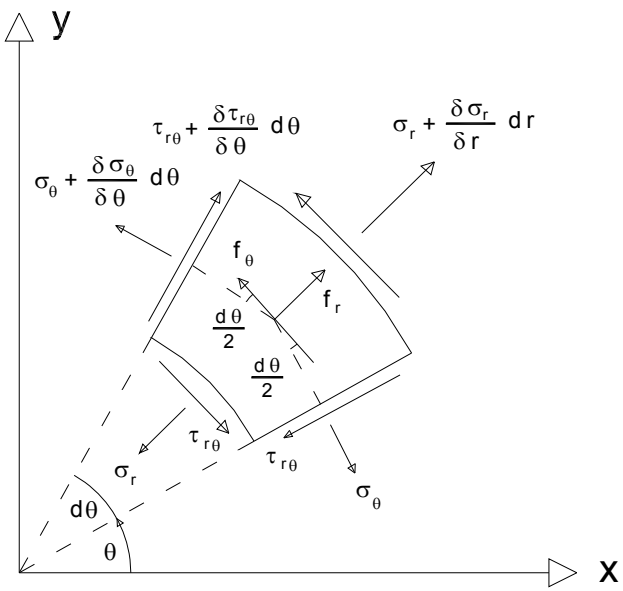
$$\phi_2 = x^2 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2$$

$$\phi_3 = y^2 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2$$

NOTA: Función de Airy en cartesianas.

CAPÍTULO 6- ELASTICIDAD EN COORDENADAS POLARES

6.1- ELASTICIDAD PLANA EN COORDENADAS POLARES



f_r y f_θ son fuerzas másicas (al ser por unidad de área, deben multiplicarse por $dr \cdot r \cdot d\theta$).

Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + f_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \cdot \frac{\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$$

Relaciones desplazamientos-deformaciones:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

u, v: desplazamientos según las direcciones r, θ.

Ecuación de compatibilidad:

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \qquad \text{con} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Tensión plana: $\sigma_z = 0$

● Ley de Hooke: $\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\upsilon \\ -\upsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix}$ $\quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$ $\quad \varepsilon_z = \frac{-\upsilon}{E} \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta)$

● Ecuaciones de Lamé: $\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\upsilon^2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \upsilon \\ \upsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$ $\quad \tau_{r\theta} = G \cdot \gamma_{r\theta}$ $\quad \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$

Deformación plana: $\varepsilon_z = 0$

● Ley de Hooke: $\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \frac{(1+\upsilon)}{E} \cdot \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & -\upsilon \\ -\upsilon & (1-\upsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix}$ $\quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$ $\quad \varepsilon_z = 0$

● Ecuaciones de Lamé: $\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)\cdot(1-2\cdot\upsilon)} \cdot \begin{pmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon \\ \upsilon & (1-\upsilon) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$

$$\tau_{r\theta} = G \cdot \gamma_{r\theta} \qquad \sigma_z = \upsilon \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

Tensores de tensiones y deformaciones:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{r\theta} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{rz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{r\theta} & \varepsilon_\theta & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{\theta z} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{rz} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{\theta z} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Función de Airy (válida sólo si las fuerzas de masa son nulas):

$$\nabla^4 \Phi = 0 \qquad \nabla^2 \Phi = \sigma_r + \sigma_\theta \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \qquad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right]$$

6.2- TENSIONES PRINCIPALES

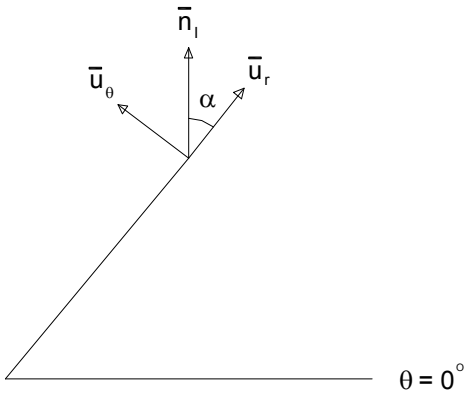
El tensor de tensiones en dos dimensiones es:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{pmatrix}$$

Y las tensiones principales resultan:

$$\boxed{\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}{}^2}}$$

Y las direcciones principales son:



$$\boxed{tg(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_\theta}}$$

α es el ángulo que forma la dirección principal I con el radio vector unitario $\bar{u}_r$.

En la base $\left[\bar{u}_r, \bar{u}_\theta\right]$ las direcciones principales son:

$$\bar{n}_I = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} \qquad \bar{n}_{II} = \begin{bmatrix} -sen\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Y la ecuación de las curvas isoclinas es:

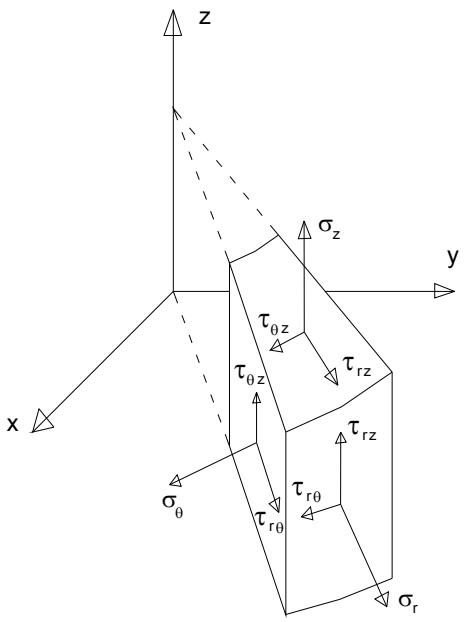
$$tg(2 \cdot \alpha) = cte = \frac{2 \cdot \tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_\theta}$$

6.3- ESTADOS AXILSIMÉTRICOS

En los estados axilsimétricos normalmente se toma como eje de simetría el eje z, como coordenada radial r y como coordenada angular θ. Se tiene:

- Tensiones no nulas: σ_r, σ_θ, σ_z, τ_{rz}
- Tensiones nulas: $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$
- Deformaciones no nulas: ε_r, ε_θ, ε_z, γ_{rz}
- Deformaciones nulas: $\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ \tau_{rz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot (\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \tau_{rz} + f_z = 0$$

Ecuaciones de compatibilidad interna:

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z} = 0 \qquad \varepsilon_r - \varepsilon_\theta - r \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = 0$$

Relaciones entre deformaciones y movimientos:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

Ley de Hooke:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_r - \upsilon \cdot \left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_\theta - \upsilon \cdot \left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right]$$

$$\gamma_{rz} = \frac{2 \cdot (1+\upsilon)}{E} \cdot \tau_{rz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \upsilon \cdot \left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right]$$

Ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_r = \lambda \cdot e + \frac{E}{(1+\upsilon)} \cdot \varepsilon_r$$

con: $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$

$$\sigma_\theta = \lambda \cdot e + \frac{E}{(1+\upsilon)} \cdot \varepsilon_\theta$$

$$s = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot e + \frac{E}{(1+\upsilon)} \cdot \varepsilon_z$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \upsilon}{(1+\upsilon) \cdot (1 - 2 \cdot \upsilon)}$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2 \cdot (1+\upsilon)} \cdot \gamma_{rz}$$

Función de Airy:

$$\Phi(r) = A \cdot \ln(r) + B \cdot r^2 \cdot \ln(r) + C \cdot r^2 + D$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B \cdot \left[1 + 2 \cdot \ln(r)\right] + 2 \cdot C$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{-A}{r^2} + B \cdot \left[3 + 2 \cdot \ln(r)\right] + 2 \cdot C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

6.4- TUBO CIRCULAR SOMETIDO A PRESIONES RADIALES

Sea una tubería circular sometida a una presión interior uniforme p_i y a una presión exterior uniforme p_e. La función de Airy con simetría axil es:

$$\Phi(r) = A \cdot \ln(r) + B \cdot r^2 \cdot \ln(r) + C \cdot r^2 + D$$

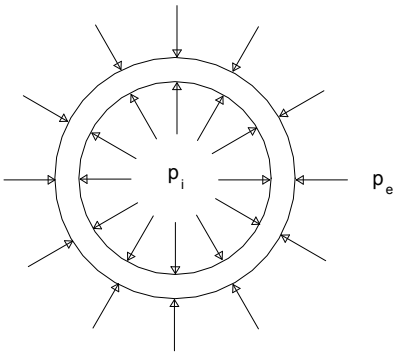
En este caso, B = D = 0. Por tanto:

$$\Phi(r) = A \cdot \ln(r) + C \cdot r^2$$

Y las tensiones:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + 2 \cdot C \\ \sigma_\theta = \dfrac{-A}{r^2} + 2 \cdot C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array} \right.$$

Las condiciones de contorno son:



$$\sigma_r(r = R_e) = -p_e$$
$$\sigma_r(r = R_i) = -p_i$$

Resolviendo, se tiene: $A = \dfrac{(p_e - p_i) \cdot R_e^{\,2} \cdot R_i^{\,2}}{R_e^{\,2} - R_i^{\,2}}$ $\qquad C = \dfrac{p_e \cdot R_e^{\,2} - p_i \cdot R_i^{\,2}}{2 \cdot \left(R_i^{\,2} - R_e^{\,2}\right)}$

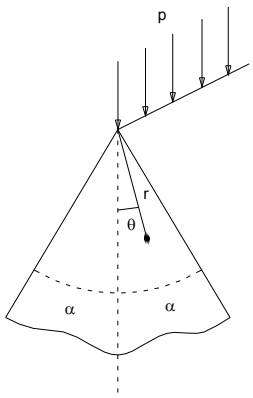
Y el desplazamiento radial: $u = r \cdot \varepsilon_\theta = \dfrac{r}{E} \cdot \left[\sigma_\theta - \upsilon \cdot \sigma_r\right]$

Deformaciones (simetría de revolución):

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_\theta - \upsilon \cdot \sigma_r\right] \qquad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \gamma_{r\theta} = 0$$

6.5- CARGAS CONCENTRADAS EN CUÑAS

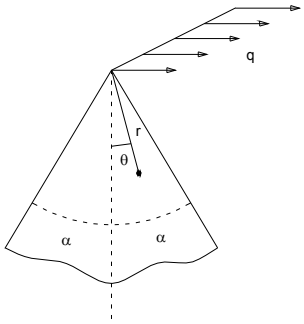
Carga axil:



p (carga por unidad de longitud)

$$\underline{T} = \frac{-2 \cdot p}{2 \cdot \alpha + sen(2\alpha)} \cdot \frac{\cos\theta}{r} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

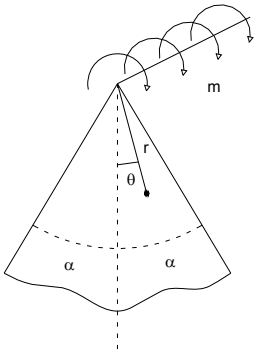
Carga cortante:



q (carga por unidad de longitud)

$$\underline{T} = \frac{-2 \cdot q}{2 \cdot \alpha - sen(2\alpha)} \cdot \frac{sen\theta}{r} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Momento flector:

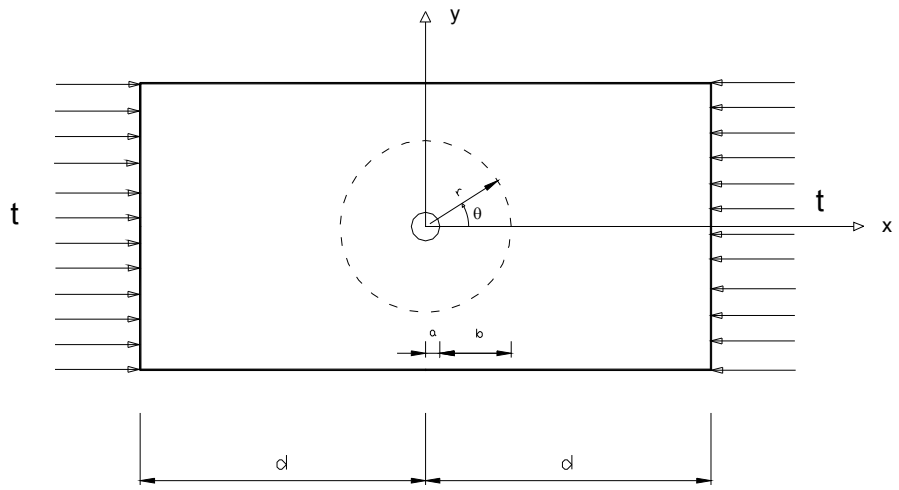


m (carga por unidad de longitud)

$$\underline{T} = \frac{m}{sen(2\alpha) - 2 \cdot \alpha \cdot \cos(2\alpha)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot sen(2\theta) & \cos(2\theta) - \cos(2\alpha) \\ \cos(2\theta) - \cos(2\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

6.6- CHAPA CON TALADRO

Sea una placa rectangular, suficientemente grande, en estado de tensión plana, solicitada por una tracción $\sigma_x = t$ en sus bordes $x = \pm d$. Si se perfora un pequeño agujero, de radio $a << d$, el estado tensional original ($\sigma_x = t$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ en toda la placa) se altera de la siguiente forma:



$$\lambda = \frac{a}{r}$$

$$\sigma_r = \frac{t}{2} \cdot \left[1 - \lambda^2 + \left(1 + 3 \cdot \lambda^4 - 4 \cdot \lambda^2\right) \cdot \cos(2\theta)\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{t}{2} \cdot \left[1 + \lambda^2 - \left(1 + 3 \cdot \lambda^4\right) \cdot \cos(2\theta)\right]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{t}{2} \cdot \left[1 - 3 \cdot \lambda^4 + 2 \cdot \lambda^2\right] \cdot sen(2\theta)$$

En el borde del agujero: $\lambda = 1$

$$\sigma_r = 0$$

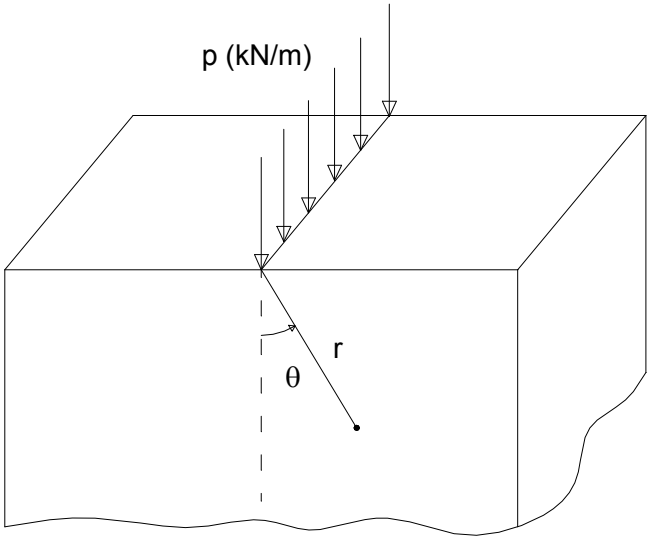
$$\tau_{r\theta} = 0$$

$\sigma_\theta = t \cdot \left[1 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \theta\right]$ que en $\theta = \pm 90°$ es $\sigma_\theta = 3 \cdot t$

6.7- TENSIONES EN SUELO BAJO CARGA REPARTIDA

Un problema frecuente en cimentaciones es determinar el estado tensional de un suelo bajo una carga lineal uniformemente repartida (por ejemplo, un carril de ferrocarril). En este caso, la función de Airy es:

$$\Phi = \frac{-p}{\pi} \cdot r \cdot \theta \cdot sen\theta$$



Y las tensiones son:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-2 \cdot p}{\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r} \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}}$$

Polar 1.

La laja triangular de la figura, de espesor “e” muy pequeño, se encuentra sometida a una carga uniforme q (kN/m) a lo largo de su borde superior y se supone que su estado tensional viene regido por la función de tensión siguiente:

$$\Phi\,(r,\theta) = K\cdot r^2\,(\text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta - a\cdot\cos^2\theta + b - \theta)$$

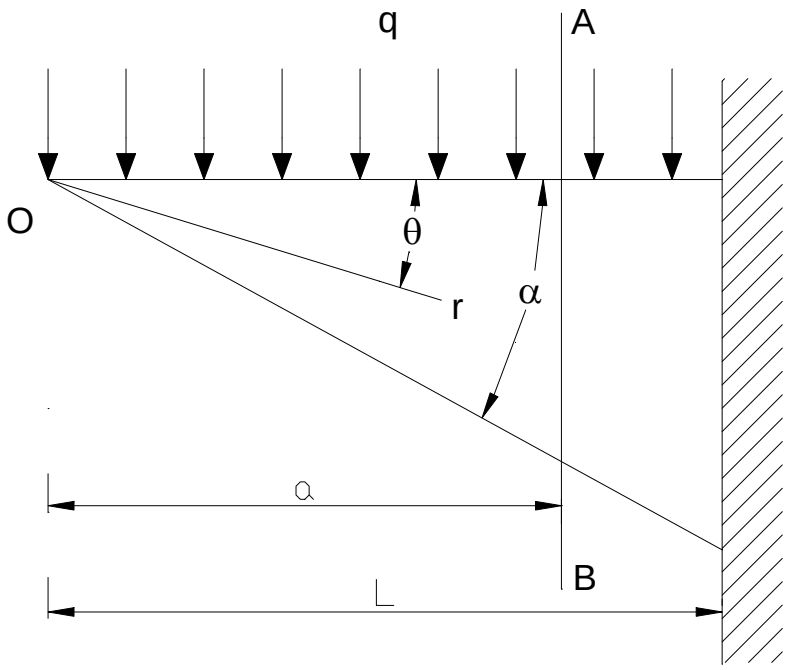
siendo K, a y b constantes a determinar.

Se pide:

1. Comprobar si la función $\Phi\,(r,\theta)$ es la función de tensión de Airy solución del problema elástico. Indicar qué ecuaciones satisface y cuáles no.

2. Obtener los valores de las constantes anteriores más adecuadas y las hipótesis o simplificaciones introducidas en su cálculo.

3. Determinar, a lo largo de la sección vertical AB definida por la distancia “a”, la distribución de las tensiones normales y tangenciales que se producen, representando gráficamente dicha distribución y comparándola con la que se deduciría de la Resistencia de Materiales, considerando la laja como una viga de sección variable en voladizo.



Enunciado: Polar I (60')

La laja triangular de la figura, de espesor "e" muy pequeño, se encuentra sometida a una carga uniforme q (KN/m) a lo largo del borde superior y se supone que su estado tensional viene regido por la función de tensión siguiente:

$$\phi(r,\theta) = K \cdot r^2 \left(\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta - a\cos^2\theta + b - \theta \right)$$

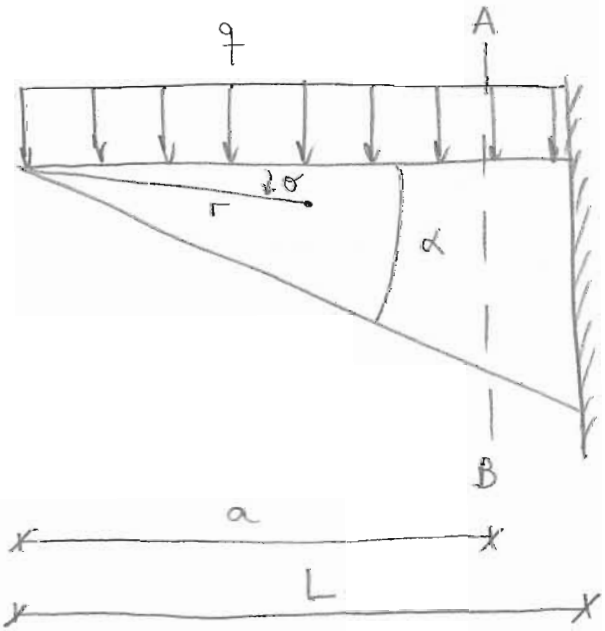
siendo K, a y b constantes a determinar.

Se pide:

1) Comprobar si la función $\phi(r,\theta)$ es la función de tensión de Airy solución del problema elástico. Indicar qué ecuaciones satisface y cuáles no.

2) Obtener los valores de las constantes anteriores más adecuadas y las hipótesis o simplificaciones introducidas en su cálculo.

3) Determinar, a lo largo de la sección vertical AB definida por la distancia "a", la distribución de las tensiones normales y tangenciales que se producen, representando gráficamente dicha distribución y comparándola con la que se deduciría de Resistencia de Materiales, considerando la laja como una viga de sección variable en voladizo.



Resolución:

1) Para ver si la función dada es solución del problema elástico, debe cumplir:

- Que sea biarmónica.
- Que las tensiones que de ella se deriven satisfagan las condiciones de contorno.

$$\phi(r,\theta) = K r^2 \left(\operatorname{sen}\theta \cos\theta - a\cos^2\theta + b - \theta \right)$$

Se sustituye $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}$

Para ser biarmónica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right)(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -K\operatorname{sen}2\theta + 2Kb - 2K\theta - 2K\cdot a\cdot\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = K\operatorname{sen}2\theta - 2aK\cos^2\theta + 2Kb - 2K\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = -K\cdot\cos2\theta - a\cdot K\cdot\operatorname{sen}2\theta + K$$

$$\nabla^2\phi = \sigma_r + \sigma_\theta = 4Kb - 4K\theta - 2aK$$

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right)(4Kb - 4K\theta - 2aK) = 0 \quad \checkmark$$

Por tanto, las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se cumplen. Ahora hay que verificar las condiciones de contorno.

2) • CARA SUPERIOR: $\theta = 0°$ $\quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ q/e \end{bmatrix}$ $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = T\cdot\bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_{r\theta} \\ -\sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q/e \end{bmatrix}$$

$$-\tau_{r\theta} = K - K = 0 \quad \checkmark$$

$$-\sigma_\theta = 2aK - 2Kb = 2K(a-b) = \frac{q}{e}$$

SIMPLIFICACIÓN: Se supone que la carga se reparte de manera uniforme en el ancho.

$$K = \frac{q}{2e(a-b)}$$

• CARA INFERIOR: $\theta = \alpha$ $\quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

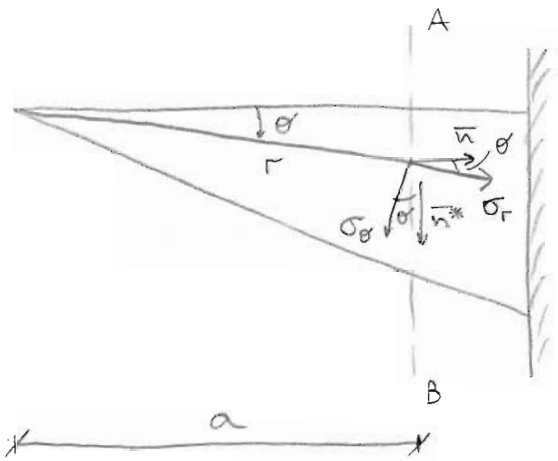
$$-K \cdot \cos 2\alpha - K \cdot a \operatorname{sen} 2\alpha + K = 0 \longrightarrow \boxed{a = \operatorname{tg} \alpha}$$

$$K \operatorname{sen} 2\alpha - 2aK \cos^2 \alpha + 2Kb - 2K\alpha = 0 \longrightarrow \boxed{b = \alpha}$$

Por tanto:

$$\boxed{K = \frac{q}{2e(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)}}$$

3) SECCIÓN AB:



$$\bar{n}_{AB} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{n}^*_{AB} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{AB} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{AB} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta \\ \tau_{r\theta} \cos\theta - \sigma_\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Proyectando (normal y tangencial):

$$\sigma = \bar{n}_{AB}^T \cdot \bar{t}_{AB} = [\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta] \begin{bmatrix} \sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta \\ \tau_{r\theta} \cos\theta - \sigma_\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_r \cos^2\theta - 2\tau_{r\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \sigma_\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\tau = \bar{n}^{*T}_{AB} \cdot \bar{t}_{AB} = [\operatorname{sen}\theta, \cos\theta] \begin{bmatrix} \sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta \\ \tau_{r\theta} \cdot \cos\theta - \sigma_\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} =$$

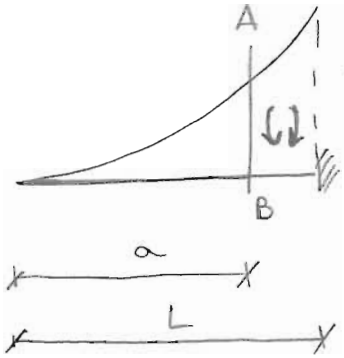
$$= \sigma_r \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \tau_{r\theta} \operatorname{sen}^2\theta + \tau_{r\theta} \cos^2\theta - \sigma_\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

Operando:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= K\left[2\alpha - 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta\right] \\ \tau &= -2K \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}}$$

ELASTICIDAD

En Resistencia de Materiales:

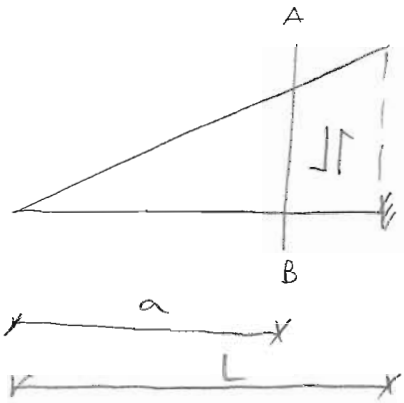


$$M = \frac{qL^2}{2}$$

Ley M_f

$$M_f = \frac{qa^2}{2}$$

$$\sigma = \frac{M_f \cdot y}{I}$$



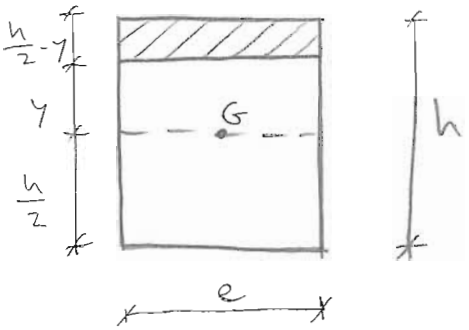
$$Q = q \cdot L$$

Ley Q

$$Q = q \cdot a$$

$$\tau = \frac{Q \cdot M_{est}}{I \cdot b}$$

Las características mecánicas de la sección son:

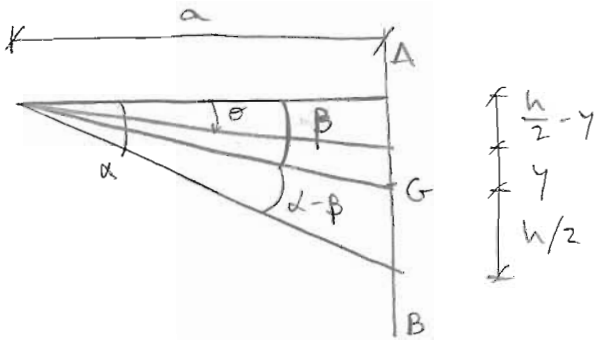


$$tg\,\alpha = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot tg\,\alpha$$

$$I = \frac{1}{12} e h^3 = \frac{1}{12} e a^3 tg^3\alpha$$

$$M_{est} = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot e \left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right) = \frac{e}{8}\left[a^2 tg^2\alpha - 4y^2\right]$$

Hay que poner "y" en función de θ y α.



$$tg\,\beta = \frac{h}{2a} \rightarrow h = 2a\,tg\,\beta$$

$$tg\,\theta = \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{a}$$

De donde:

$$y = \frac{h}{2} - a\,tg\,\theta = a \cdot tg \cdot \beta - a\,tg\,\theta = a\left[\frac{tg\,\alpha}{2} - tg\,\theta\right]$$

$$M_{est} = \frac{a^2 \, tg\theta \, e \left[tg\alpha - tg\theta \right]}{2}$$

Sustituyendo

$$\boxed{\sigma = \frac{M_f \cdot y}{I} = \frac{\frac{q a^2}{2} \cdot a \left(\frac{tg\alpha}{2} - tg\theta \right)}{\frac{1}{12} e \, a^3 \, tg^3\alpha} = \frac{6q}{e} \frac{\left[\frac{tg\alpha}{2} - tg\theta \right]}{tg^3\alpha}} \quad \text{R.M.}$$

$$\boxed{\tau = \frac{Q \cdot M_{est}}{I \cdot b} = \frac{q \cdot a \, \frac{a^2 \, tg\theta \, e \left[tg\alpha - tg\theta \right]}{2}}{\frac{1}{12} e \, a^3 \, tg^3\alpha \cdot e} = \frac{6q \, tg\theta \left[tg\alpha - tg\theta \right]}{tg^3\alpha \cdot e}} \quad \text{RM}$$

Lo mejor es sustituir los valores numéricos:

$q = 100$ KN/m
$e = 0'01$ m
$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$a = 0'57735$
$b = 0'5236$
$K = 93021$

Sustituyendo:

$$\sigma_{EL} = 93021 \left[1'0472 - 2\theta - sen 2\theta \right]$$

$$\tau_{EL} = -186042 \cdot sen^2\theta$$

$$\sigma_{RM} = 311769 \cdot \left[0'2887 - tg\theta \right]$$

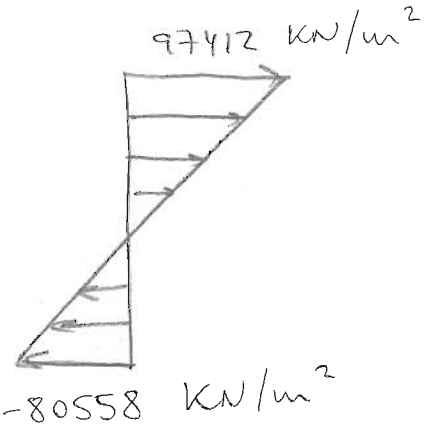
$$\tau_{RM} = 311769 \cdot tg\theta \left[0'57735 - tg\theta \right]$$

Dando valores a θ:

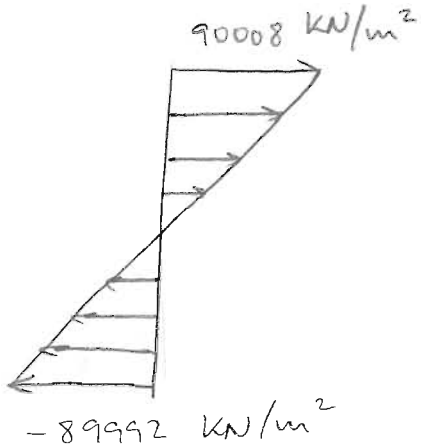
θ	σ_{EL}	σ_{RM}	τ_{EL}	τ_{RM}
0	97412	90008	0	0
$\pi/30$	58589	57239	-2032	15475
$\pi/15$	20612	23739	-8042	24188
$\pi/10$	-15712	-11292	-17765	25571
$2\pi/15$	-49646	-48801	-30778	18340
$\pi/6$	-80558	-89992	-46510	0

Tensiones en $\frac{KN}{m^2}$

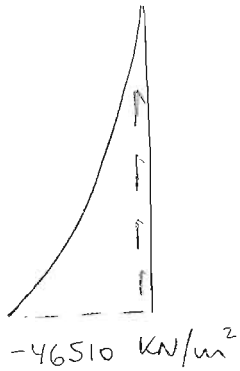
Gráficamente:



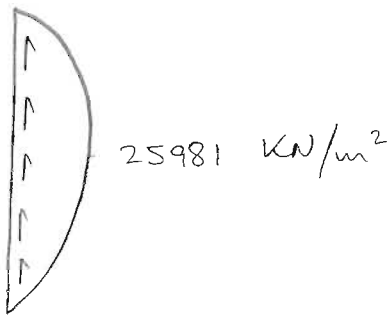
σ_{EL}



σ_{RM}



τ_{EL}



τ_{RM}

NOTA: Función de Airy en polares

Enunciado: (Práctica 8, curso 2000-2001) | EXAMEN JUNIO 2000 |

Un disco circular de espesor e y R de radio está empotrado en un eje cilíndrico coaxial de radio r. Sobre la circunferencia del contorno exterior del disco existe una distribución uniforme de tensiones tangenciales cuya resultante es un momento de valor M.

Se supone un estado de tensión plana y que no existen fuerzas de masa. Se admite como hipótesis que la función de tensión del problema, en coordenadas polares con origen el eje del disco, es de la forma:

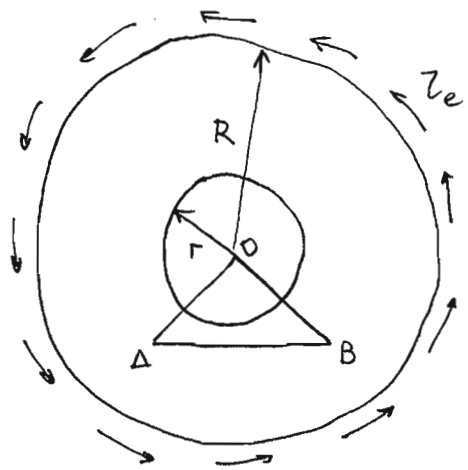
$$\phi = \phi(\rho, \theta) = K \cdot \theta$$

siendo K una constante. Se pide:

1) Deducir si la hipótesis sobre la función ϕ es exacta o aproximada
2) Determinar el valor exacto o el más aproximado, según proceda, de la constante K.
3) Calcular y dibujar la variación de la tensión total sobre el plano AB, indicado en la figura.
4) Calcular el desplazamiento circunferencial del punto A.

DATOS: $E = 3 \cdot 10^7 \ N/cm^2$, $\nu = 0'20$

La situación del plano AB está determinada por las distancias de los lados $OA = OB = \frac{R}{2}$, los cuales forman entre sí un ángulo recto.



Resolución:

1) Para comprobar la validez de la función de Airy, debe cumplir:

- SER BIARMÓNICA.
- CONDICIONES DE CONTORNO.

La primera condición es:

$$\left| \begin{array}{l} \nabla^4 \phi = 0 \\ \nabla^2 \phi = \sigma_\rho + \sigma_\theta \end{array} \right. \qquad \phi = K \cdot \theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = K$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = 0 \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho} K \right) = \frac{K}{\rho^2} \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 \phi = \sigma_\rho + \sigma_\theta = 0 \implies \nabla^4 \phi = 0$$ luego es biarmónica

2) Ahora hay que ver las condiciones de contorno.

$$\tau(\rho = R) = \tau_e \qquad R \cdot d\theta = ds$$

$$M = \int_0^{2\pi} \tau_e \cdot R \cdot e \cdot ds = \int_0^{2\pi} \tau_e \cdot R^2 \cdot e \cdot d\theta = \tau_e \cdot R^2 \cdot e \cdot 2\pi$$

$$\tau_e = \frac{M}{2\pi R^2 \cdot e}$$

Sustituyendo:

$$\tau_{r\theta}(\rho = R) = \frac{K}{R^2} = \frac{M}{2\pi R^2 \cdot e} \implies \boxed{K = \frac{M}{2\pi \cdot e}}$$ Solución exacta

Polar 4.

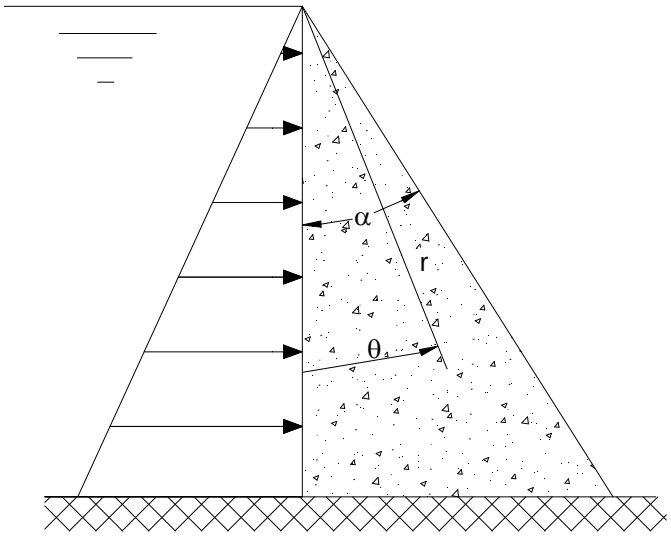
La presa de la figura está sometida al empuje de un líquido de peso específico ρ = 20 kN/m^3. Se pide:

1. Demostrar que las tensiones se pueden derivar de la siguiente función de Airy:

$$\phi\,(r, \theta) = r^3\,(A \cos 3\theta + B \operatorname{sen} 3\theta + C \cos\theta + D \operatorname{sen}\theta)$$

2. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D y las expresiones de las tensiones para α = 30º.

(Examen de febrero de 1989)



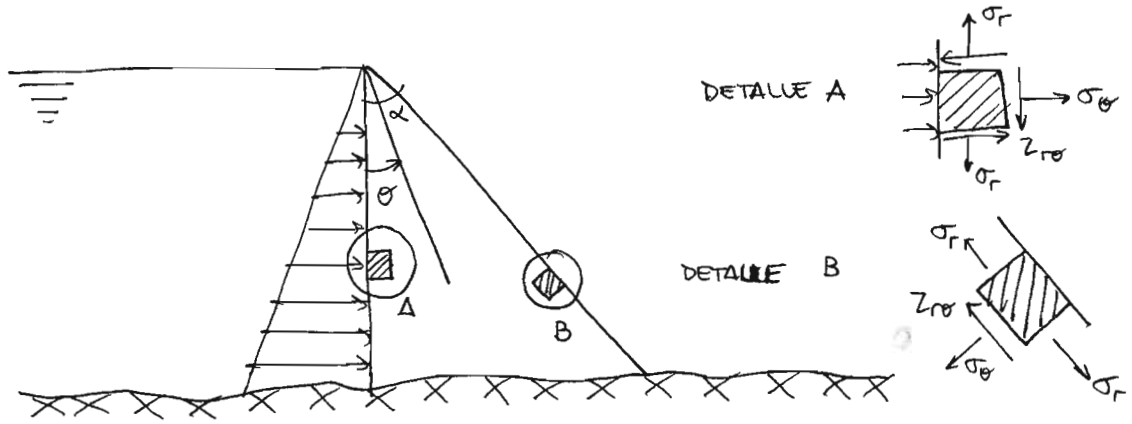
Enunciado: (extraído de BREVELAS): Polar 4 | EXAMEN FEBRERO 1989

En la presa de la figura se pide:

1) Demostrar que las tensiones producidas por el empuje de un líquido de peso específico $\rho = 20 \frac{KN}{m^3}$ que actúa sobre su paramento vertical pueden derivarse de la función de tensiones siguiente:

$$\phi = r^3 (A \cos 3\theta + B \operatorname{sen} 3\theta + C \cos\theta + D \operatorname{sen}\theta)$$

2) Determinar los valores de las constantes A, B, C, D y las expresiones de las tensiones para $\alpha = 30°$.



Resolución:

1) Es preciso demostrar:

- La función ϕ es biarmónica.
- Condiciones de contorno.

Primero hay que determinar σ_r y σ_θ.

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 3r^2 (A \cos 3\theta + B \operatorname{sen} 3\theta + C \cos\theta + D \operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r^3 (-3A \operatorname{sen} 3\theta + 3B \cos 3\theta - C \operatorname{sen}\theta + D \cos\theta)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 6r\left(A\cos 3\theta + B\,\text{sen}\,3\theta + C\cos\theta + D\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = r^3\left(-9A\cos 3\theta - 9B\,\text{sen}\,3\theta - C\cos\theta - D\,\text{sen}\,\theta\right)$$

Sustituyendo:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_r = -6rA\cos 3\theta - 6rB\,\text{sen}\,3\theta + 2rC\cos\theta + 2rD\,\text{sen}\,\theta \\ \sigma_\theta = 6rA\cos 3\theta + 6rB\,\text{sen}\,3\theta + 6rC\cos\theta + 6rD\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right.$$

Comprobamos ahora si es biarmónica:

$$\nabla^2\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) = 0 \Rightarrow \nabla^2\underbrace{\left(8rC\cos\theta + 8rD\,\text{sen}\,\theta\right)}_{\nabla^2\phi} = 0$$

Como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$\frac{\partial(\nabla^2\phi)}{\partial r} = 8C\cos\theta + 8D\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial^2(\nabla^2\phi)}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial(\nabla^2\phi)}{\partial\theta} = -8rC\,\text{sen}\,\theta + 8rD\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2(\nabla^2\phi)}{\partial\theta^2} = -8rC\cos\theta - 8rD\,\text{sen}\,\theta$$

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = 0 + \frac{1}{r}\left(8C\cos\theta + 8D\,\text{sen}\,\theta\right) - \frac{1}{r}\left(8C\cos\theta + 8D\,\text{sen}\,\theta\right) = 0$$

Las ecuaciones de equilibrio se cumplen automáticamente por venir de una función de Airy. Las ecuaciones de compatibilidad se cumplen por ser ϕ biarmónica. Para comprobar las condiciones de contorno hace falta $\tau_{r\theta}$.

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left[-3A\,\text{sen}\,3\theta + 3B\cos 3\theta - C\,\text{sen}\,\theta + D\cos\theta\right]\right)$$

$$\tau_{r\theta} = 2r\left(3A\,\text{sen}\,3\theta - 3B\cos 3\theta + C\,\text{sen}\,\theta - D\cos\theta\right)$$

Para imponer las condiciones de contorno sólo pueden utilizarse las que vienen del exterior.

- AGUAS ARRIBA: $(\theta = 0)$

$$\tau_{r\theta} = 0 \Rightarrow 2r(-3B - D) = 0 \Rightarrow 3B + D = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$\sigma_\theta = -\rho \cdot r \Rightarrow -20 \cdot r = 6rA + 6rC \Rightarrow 3A + 3C = -10 \quad (\mathrm{II})$$

- AGUAS ABAJO: $(\theta = \alpha)$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (\mathrm{III})$$

$$\sigma_\theta = 0 \quad (\mathrm{IV})$$

2) Imponiendo las ecuaciones de contorno (III) y (IV) para $\alpha = 30°$ se tiene

$$2r\left(3A + \frac{C}{2} - \frac{D\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6A + C - D\sqrt{3} = 0 \quad (\mathrm{III})$$

$$6rB + 6rC\frac{\sqrt{3}}{2} + 3rD = 0 \Rightarrow 6B + 3\sqrt{3}C + 3D = 0 \quad (\mathrm{IV})$$

Resolviendo:

$A = -8'333$
$B = 8'659$
$C = 5$
$D = -25'978$

Y las tensiones se obtendrán sustituyendo estos valores en las respectivas expresiones.

NOTA: Problema de tensiones en polares, utilizando la función de Airy.

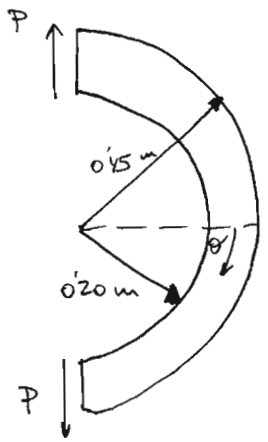
Enunciado (extraído de BREVELAS): Polares

La directriz de la pieza de la figura es medio anillo circular, y su sección transversal es rectangular, de 0'50 m de anchura. La función de Airy que corresponde al estado de tensiones producido por las fuerzas P es, en coordenadas polares con origen en la recta OA, la siguiente:

$$\phi = \left[J r \ln r + \frac{1}{r} - K r^3 \right] \frac{\cos\theta}{100}$$

con la que se obtienen las tensiones en MPa a partir de r en met
Se pide determinar:

1) Los valores de las constantes J y K.
2) El valor de la carga P en toneladas.
3) El valor máximo de la tensión circunferencial σ_θ y el punto (o los puntos) donde se produce.



Resolución:

1) En primer lugar vamos a comprobar la validez de la función de Airy, obteniendo de paso las tensiones:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\cos\theta}{100} \left[J \ln r + J - \frac{1}{r^2} - 3Kr^2 \right]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\cos\theta}{100} \left[\frac{J}{r} + \frac{2}{r^3} - 6Kr \right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{100} \left[J r \ln r + \frac{1}{r} - K r^3 \right]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{-\cos\theta}{100} \left[J r \ln r + \frac{1}{r} - K r^3 \right]$$

Por tanto:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{J \ln r}{r} + \frac{J}{r} - \frac{1}{r^3} - 3Kr - \frac{J \ln r}{r} - \frac{1}{r^3} + Kr\right]$$

$$\sigma_r = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{J}{r} - \frac{2}{r^3} - 2Kr\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{J}{r} + \frac{2}{r^3} - 6Kr\right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{-\operatorname{sen}\theta}{100}\left(J \ln r + \frac{1}{r^2} - Kr^2\right)\right] = \frac{\operatorname{sen}\theta}{100}\left[\frac{J}{r} - \frac{2}{r^3} - 2Kr\right]$$

Para comprobar la validez de la función de Airy : $\nabla^4 \phi = 0$

$$\nabla^2 \phi = \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{2J}{r} - 8Kr\right]$$

$$\nabla^2(\nabla^2 \phi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right](\nabla^2 \phi)$$

$$\frac{\partial(\nabla^2 \phi)}{\partial r} = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{-2J}{r^2} - 8K\right]$$

$$\frac{\partial^2(\nabla^2 \phi)}{\partial r^2} = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{4J}{r^3}\right]$$

$$\frac{\partial(\nabla^2 \phi)}{\partial \theta} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{100}\left[\frac{2J}{r} - 8Kr\right]$$

$$\frac{\partial^2(\nabla^2 \phi)}{\partial \theta^2} = \frac{-\cos\theta}{100}\left[\frac{2J}{r} - 8Kr\right]$$

$$\nabla^2(\nabla^2 \phi) = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{4J}{r^3} - \frac{2J}{r^3} - \frac{8K}{r} - \frac{2J}{r^3} + \frac{8K}{r}\right] = 0$$

Por tanto, la función de Airy es válida.

Las condiciones de contorno son:

$\sigma_r(r = 0'20) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{J}{0'20} - \frac{2}{0'008} - 0'4K\right]$ (I)

$\sigma_r(r = 0'45) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{J}{0'45} - \frac{2}{0'091125} - 0'9K\right]$ (II)

$\tau_{r\theta}(r = 0'20) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{100}\left[\frac{J}{0'20} - \frac{2}{0'008} - 0'4K\right]$ Igual que (I)

$\tau_{r\theta}(r = 0'45) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{100}\left[\frac{J}{0'45} - \frac{2}{0'091125} - 0'9K\right]$ Igual que (II)

$\sigma_\theta(\theta = 90°) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$\sigma_\theta(\theta = -90°) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Despejando (I) y (II):

$$\left.\begin{array}{l} 5J - 250 - 0'4K = 0 \\ 2'222J - 21'947873 - 0'9K = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} J = 59'8765 \\ K = 123'4568 \end{array}$$

2) Valor de la carga P:

ojo (KN)

$$P = \int_{0'20}^{0'45} b \cdot \tau_{r\theta}\, dr = \frac{0'50}{100}\int_{0'20}^{0'45}\left[\frac{59'8765}{r} - \frac{2}{r^3} - 5 \cdot 246'9136\right] dr \cdot 1000 =$$

$$= 0'005 \cdot \left[59'8765 \cdot \ln r + \frac{1}{r^2} - 123'4568 \cdot r^2\right]_{0'20}^{0'45} \cdot 1000 =$$

$$= 5\left[-47'812 + 4'938 - 25 + 96'368 - 25 + 4'938\right] = 5 \cdot 8'432$$

$$\boxed{P = 42'16 \text{ KN}}$$

3) Valor máximo de σ_θ y puntos donde se produce.

$$\sigma_\theta = \frac{\cos\theta}{100}\left[\frac{59'8765}{r} + \frac{2}{r^3} - 740'7408 \cdot r\right]$$

El máximo estará en $\theta = 0°$

$$\frac{\partial \sigma_\theta(\theta = 0°)}{\partial r} = \frac{1}{100}\left[-\frac{59'8765}{r^2} - \frac{6}{r^4} - 740'7408\right] = 0$$

$$-59'8765\, r^2 - 6 - 740'7408 \cdot r^4 = 0$$

$$12'374 \cdot r^4 + r^2 + 0'1 = 0 \Rightarrow \text{Las 4 raíces son imaginarias.}$$

Por tanto, los máximos absolutos estarán en los extremos.

$$\sigma_\theta(\theta = 0, r = 0'20) = 4'01 \text{ MPa}$$

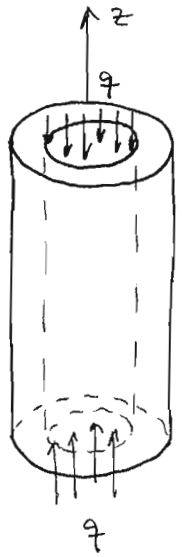
$$\sigma_\theta(\theta = 0, r = 0'45) = -1'78 \text{ MPa}$$

Por tanto, el máximo es el primero.

NOTA: Problema en polares, utilizando la función de Airy.

Enunciado (extraído de BREVELAS): Polar6

Un cilindro de 0'25 m de radio y 1'50 m de altura está embutido en un tubo del mismo material, de igual altura, de 0'25 m de radio interior y 0'05 m de espesor. Las características mecánicas del material son: $E = 3 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0'2$ y tensión de rotura a tracción $\sigma_T = 2$ MPa. Sobre los extremos del cilindro se aplica una compresión uniforme y progresiva con la intención de romper el tubo que lo envuelve. Suponiendo que no hay rozamiento entre los dos cuerpos y que el material se comporta elásticamente hasta rotura, calcular la compresión necesaria para conseguir la rotura.



Resolución:

Al aplicar $\sigma_z = -q$ sobre los extremos del cilindro, este se ensanchará por efecto Poisson. Si estuviera libre engordaría $\varepsilon_\theta = \frac{\nu q}{E}$, pero al haber un tubo se crea una interacción entre ambos cuerpos de valor $\sigma_r = -p$ desconocida, que reduce la deformación ε_θ. Por tanto, lo primero es calcular la presión necesaria p para romper el tubo, y luego la q necesaria para alcanzar p.

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Con:

$$A = \frac{(p_e - p_i) R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = \frac{-p \cdot 0'25^2 \cdot 0'30^2}{0'30^2 - 0'25^2} = -0'20455\, p$$

$$B = 0$$

$$C = \frac{p_e R_e^2 - p_i R_i^2}{2(R_i^2 - R_e^2)} = \frac{-p \cdot 0'25^2}{2(0'25^2 - 0'30^2)} = 1'13636\, p$$

Luego:

$$\sigma_r = \frac{-0'20455\, p}{r^2} + 2'27273 \cdot p$$

$$\sigma_\theta = \frac{0'20455\, p}{r^2} + 2'27273 \cdot p$$

Cuando la tensión sea $\sigma_T = 2$ MPa se romperá el tubo. La máxima tracción es:

$$\sigma_\theta (r = 0'25) = \frac{0'20455\, p}{0'25^2} + 2'27273\, p = 5'546\, p$$

$$5'546\, p = 2 \text{ MPa} \Rightarrow \boxed{p = 0'361 \text{ MPa}}$$

Ahora hay que establecer la compatibilidad de movimientos entre el cilindro y el tubo (igualdad de ε_r y ε_θ).

ESTADOS AXILSIMÉTRICOS

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$

$$\gamma_{r\theta} = 0$$

En el tubo: $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = 6'907 \cdot 10^{-5}$

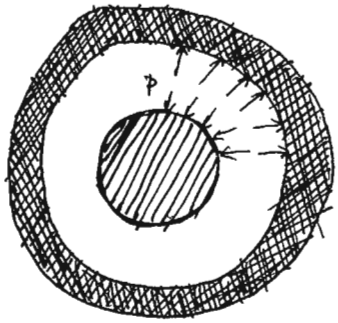
En este caso $\sigma_z = 0$

Ahora hay que ver qué compresión q hay que aplicar en el cilindro para producir esta deformación. El estado tensional del cilindro en el momento de la rotura es:

$$\sigma_r = -p = -0'361 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\theta = -p \cdot 5'546 = -2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = -q$$



Por tanto:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\left[\sigma_r + \sigma_z\right]\right) = \frac{1}{3 \cdot 10^4}\left(-2 - 0'2\left(-0'361 - q\right)\right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{3 \cdot 10^4}\left(-1'9278 + 0'2q\right) = -6'426 \cdot 10^{-5} + 6'666 \cdot 10^{-6} q$$

Igualando al valor de ε_θ de la tubería:

$$-6'426 \cdot 10^{-5} + 6'666 \cdot 10^{-6} q = 6'907 \cdot 10^{-5}$$

Por tanto:

$$\boxed{q = 20 \text{ MPa}}$$

NOTA: Problema de tubería sometida a presión interna y externa.

Polar 7.

La estructura OAB es una chapa de 20 cm de espesor y está empotrada en AB. Como consecuencia de las acciones exteriores, se origina un estado plano de tensiones definido por la función de Airy:

$$\Phi(r,\theta) = 2.5 \cdot r^2 (\pi - 2 - 4 \cdot \theta + 2 \cdot \text{sen}2\theta - 2 \cdot \cos 2\theta)$$

Se supone que no actúan fuerzas de masa ni acciones térmicas.

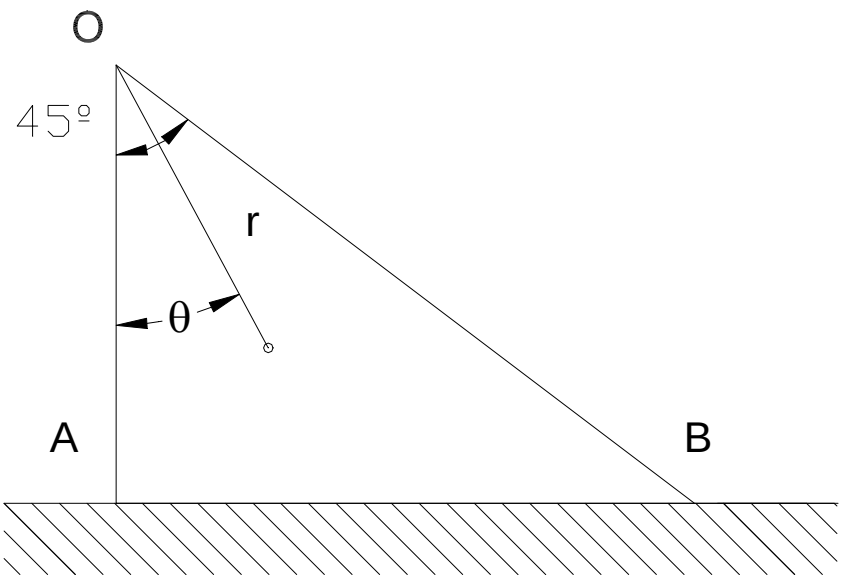
El origen de la coordenada radial es el punto O y el de los ángulos es la recta OA, con el sentido positivo indicado en la figura. Expresando r en metros, las tensiones resultan en Mpa. Se pide:

1. Ley de variación de las tensiones totales en los contornos OA y OB.

2. Tensiones principales en los puntos: C (r = 6 cm; θ = 15º); D (r = 10 cm; θ = 30º).

3. Ecuaciones de las isoclinas para los siguientes valores del ángulo α: $\alpha = 0$; $\alpha = \pi/2$; $\alpha = 5\pi/8$ (rad), siendo α el ángulo que forma en cada punto la tensión principal mayor con la dirección radial.

(Examen de junio de 1999)



Enunciado: **EXAMEN JUNIO 1999** Polar 7 (40')

La estructura OAB es una chapa de 20 cm de espesor y está empotrada en AB. Como consecuencia de las acciones exteriores, se origina un estado plano de tensiones definido por la función de Airy:

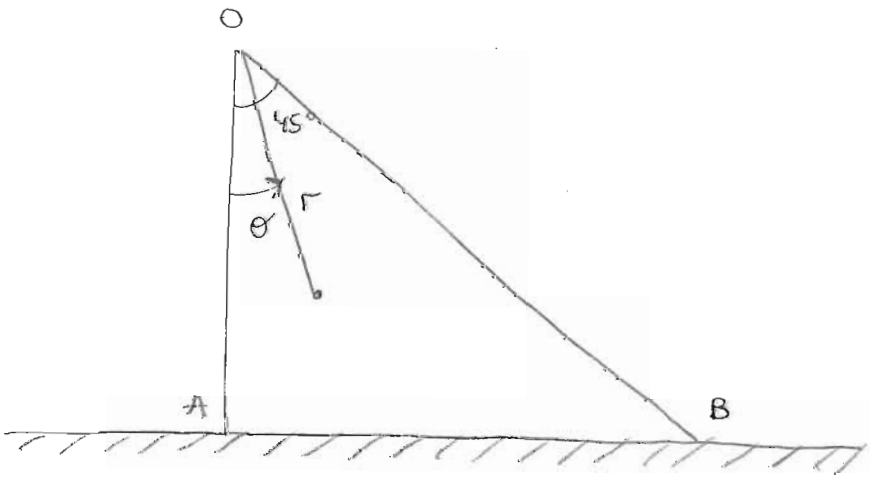
$$\phi(r,\theta) = 2'5 \cdot r^2 \left[\pi - 2 - 4\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta - 2 \cos 2\theta \right]$$

Se supone que no actúan fuerzas de masa ni acciones térmicas. El origen de la coordenada radial es el punto O y el de los ángulos es la recta OA, con el sentido positivo indicado en la figura. Expresando r en metros, las tensiones resultan en MPa. Se pide:

1) Ley de variación de las tensiones totales en los contornos OA y OB.

2) Tensiones principales en los puntos C ($r = 6$ cm, $\theta = 15°$) y D ($r = 10$ cm, $\theta = 30°$).

3) Ecuaciones de las isoclinas para los siguientes valores del ángulo α: $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$, $\alpha = 5\pi/8$, siendo α el ángulo que forma en cada punto la tensión principal mayor con la dirección radial.



Resolución:

1) Lo primero es comprobar la validez de la función de Airy, obteniendo de paso las expresiones de las tensiones.

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 5\left[\pi - 2 - 4\theta - 2\,\text{sen}\,2\theta + 2\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 5\left[\pi - 2 - 4\theta + 2\,\text{sen}\,2\theta - 2\cos 2\theta\right]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right] = 5\left[2 - 2\cos 2\theta - 2\,\text{sen}\,2\theta\right]$$

Para comprobar si la función de Airy es biarmónica.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 10\left[\pi - 2 - 4\theta\right]$$

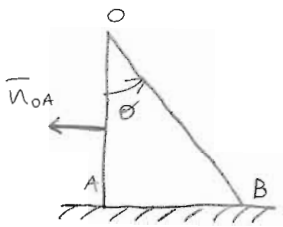
y: $\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 + 0 + 0 = 0$ ✓ Biarmónica

y el tensor de tensiones queda:

$$\underline{T} = 5\begin{bmatrix} \pi - 2 - 4\theta - 2\,\text{sen}\,2\theta + 2\cos 2\theta & 2 - 2\cos 2\theta - 2\,\text{sen}\,2\theta \\ 2 - 2\cos 2\theta - 2\,\text{sen}\,2\theta & \pi - 2 - 4\theta + 2\,\text{sen}\,2\theta - 2\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

• RECTA OA:

$\theta = 0°$



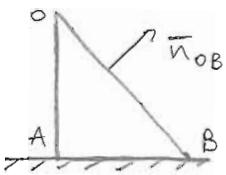
$$\bar{n}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ojo, no conozco las cargas exteriores, por lo que no puedo suponer que las presiones en los contornos OA y OB sean nulas.

$$\boxed{\bar{t}_{OA} = \underline{T}^{OA} \cdot \bar{n}_{OA} = 5\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi - 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 - 5\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4'292 \end{bmatrix} \text{ MPa}}$$

• RECTA OB:

$\theta = \frac{\pi}{4}$



$$\bar{n}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{t}_{OB}} = \underline{T}^{OB} \cdot \bar{n}_{OB} = 5\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} MPa}$$

2) Tensiones principales en los puntos $C\left(0'06, \frac{\pi}{12}\right)$ y $D\left(0'1, \frac{\pi}{6}\right)$

$$\underline{T}^{C} = \begin{bmatrix} 4'132 & -3'66 \\ -3'66 & -3'188 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\sigma_I = 5'648 \text{ MPa} \rightarrow \bar{n}_I = \begin{bmatrix} 0'924 \\ -0'383 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -4'704 \text{ MPa} \rightarrow \bar{n}_{II} = \begin{bmatrix} 0'383 \\ 0'924 \end{bmatrix}$$

Para el punto D:

$$\underline{T}^{D} = \begin{bmatrix} -8'424 & -3'66 \\ -3'66 & -1'104 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \sigma_I = 0'412 \text{ MPa} \rightarrow \bar{n}_I = \begin{bmatrix} -0'383 \\ 0'924 \end{bmatrix} \\ \sigma_{II} = -9'94 \text{ MPa} \rightarrow \bar{n}_{II} = \begin{bmatrix} 0'924 \\ 0'383 \end{bmatrix} \end{array}$$

3) Isoclinas: unen puntos de igual inclinación de las tensiones principales

$$tg\, 2\alpha = cte = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_\theta}$$

Sustituyendo:

$$tg\, 2\alpha = \frac{10\left[2 - 2\cos 2\theta - 2\,sen\, 2\theta\right]}{5\left[-4\,sen\, 2\theta + 4\cos 2\theta\right]} = \frac{1 - \cos 2\theta - sen\, 2\theta}{-sen\, 2\theta + \cos 2\theta}$$

$\alpha = 0 \rightarrow \quad 0 = 1 - \cos 2\theta - sen\, 2\theta \Rightarrow \boxed{sen\, 2\theta + \cos 2\theta = 1}$

$\theta = 0° \rightarrow$ RECTA OA

$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow$ RECTA OB

$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \quad 0 = 1 - \cos 2\theta - sen\, 2\theta \rightarrow \boxed{sen\, 2\theta + \cos 2\theta = 1}$

RECTAS OA y OB

$\alpha = \frac{5\pi}{8} \rightarrow \quad 1 = \frac{1 - \cos 2\theta - sen\, 2\theta}{\cos 2\theta - sen\, 2\theta} \rightarrow \boxed{\cos 2\theta = \frac{1}{2}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

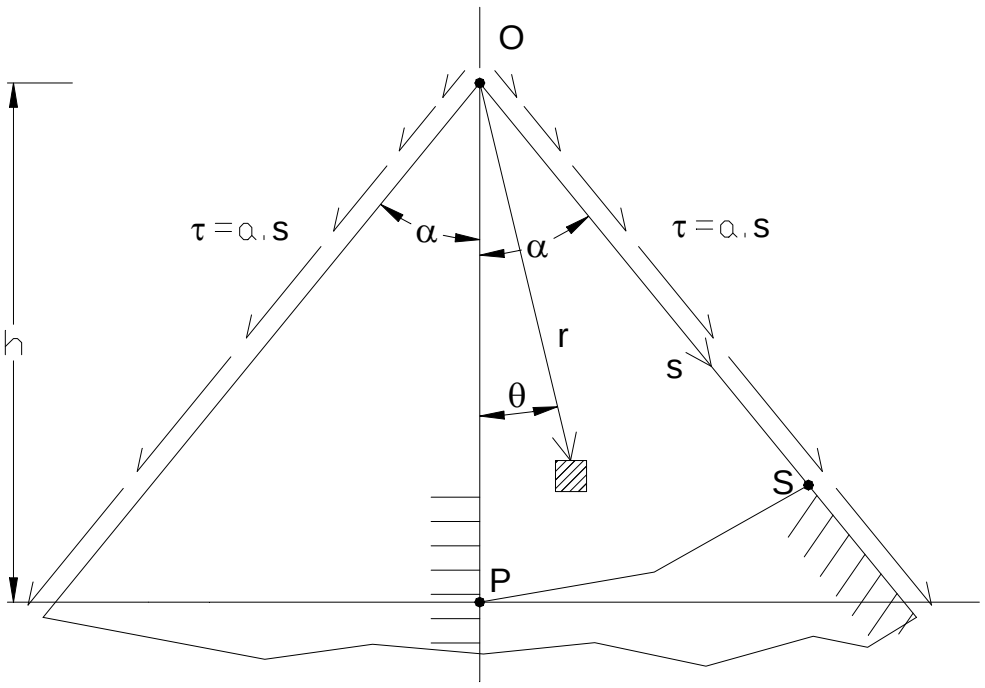
NOTA: Airy en Polares

Polar 8.

Dada la función $\Phi(r,\theta) = r^3 (A\cdot\cos 3\theta + B\cdot\cos\theta)$ se pide:

1. Demostrar que puede ser utilizada como función de Airy de algún problema elástico.
2. Obtener las expresiones de las tensiones correspondientes. Decir qué ecuaciones satisfacen estas tensiones y por qué.
3. Probar que con ellas se puede resolver el problema elástico de la cuña de espesor unidad de la figura. Determinar el valor numérico de las constantes A y B.
4. Obtener la tensión total en el punto P sobre el plano PO y en el punto S sobre el plano SO. Expresarlas por su módulo y su ángulo θ con el eje de la cuña.

(Examen de febrero de 1992).



Enunciado: EXAMEN DE FEBRERO DE 1992 Polar 8 (30')

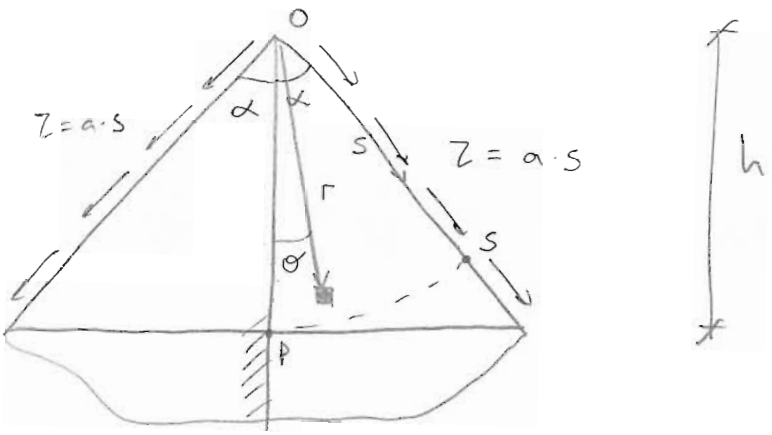
Dada la función $\phi(r,\theta) = r^3 (A \cdot \cos 3\theta + B \cos\theta)$ se pide:

1) Demostrar que puede ser utilizada como función de Airy de algún problema elástico.

2) Obtener las expresiones de las tensiones correspondientes. Decir qué ecuaciones satisfacen estas tensiones y por qué.

3) Probar que con ellas se puede resolver el problema elástico de la cuña de espesor unidad de la figura. Determinar el valor numérico de las constantes A y B.

4) Obtener la tensión total en el punto P sobre el plano PO y en el punto S sobre el plano SO. Expresarlas por su módulo y su ángulo θ con el eje de la cuña.



Resolución:

1) Para poder ser utilizada como función de Airy debe ser biarmónica.

$$\phi(r,\theta) = r^3 (A \cdot \cos 3\theta + B \cos\theta)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 3r^2\left(A\cos 3\theta + B\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 6r\left(A\cos 3\theta + B\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r^3\left(-3A\,\text{sen}\,3\theta - B\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = r^3\left(-9A\cos 3\theta - B\cos\theta\right)$$

Por tanto:

$$\sigma_r = 3r\left(A\cos 3\theta + B\cos\theta\right) + r\left(-9A\cos 3\theta - B\cos\theta\right) =$$

$$= r\left(-6A\cos 3\theta + 2B\cos\theta\right)$$

$$\sigma_\theta = 6r\left(A\cos 3\theta + B\cos\theta\right)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-3A\,\text{sen}\,3\theta - B\,\text{sen}\,\theta\right)\right] = 2r\left(3A\,\text{sen}\,3\theta + B\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$\nabla^2\phi = \sigma_r + \sigma_\theta = 8Br\cos\theta$$

Comprobamos ahora si es biarmónica:

$$\nabla^2\left(\nabla^2\phi\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\nabla^2\phi\right) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\nabla^2\phi\right)}{\partial r} = 8B\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2\left(\nabla^2\phi\right)}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\nabla^2\phi\right)}{\partial \theta} = -8Br\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial^2\left(\nabla^2\phi\right)}{\partial \theta^2} = -8Br\cos\theta$$

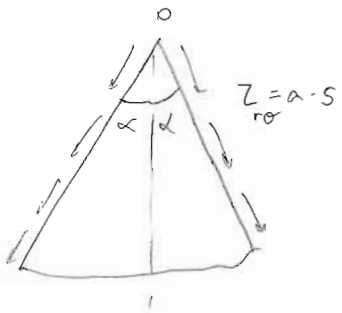
Entonces:

$$\nabla^4\phi = \frac{8B\cos\theta}{r} - \frac{8B\cos\theta}{r} = 0$$

$\Leftarrow$ O.K. Se puede usar como función de Airy

2) Las expresiones de las tensiones ya se han obtenido. Satisfacen las ecuaciones de equilibrio interno por definición y las de compatibilidad de deformaciones por ser ϕ biarmónica.

3) Hay que aplicar las condiciones de contorno.



• En $\theta = \alpha$ $\qquad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{t} = \begin{bmatrix} a \cdot s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix}$

$$\sigma_\theta = 0 = 6r\left(A \cos 3\alpha + B \cos\alpha\right) \rightarrow A \cos 3\alpha = -B \cos\alpha \quad (I)$$

$$\tau_{r\theta} = a \cdot r \Rightarrow 2r\left(3A \operatorname{sen} 3\theta + B \operatorname{sen}\theta\right) = a \cdot r$$

$$3A \operatorname{sen} 3\alpha + B \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2} \quad (II)$$

Resolviendo: $\quad A = \dfrac{-B \cos\alpha}{\cos 3\alpha}$

$$\frac{-3B \operatorname{sen} 3\alpha \cos\alpha}{\cos 3\alpha} + B \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2}$$

$$B\left(-3 \cos\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{sen}\alpha\right) = \frac{a}{2}$$

$$\boxed{B = \frac{a}{-6 \cos\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + 2 \operatorname{sen}\alpha}} \qquad \boxed{A = \frac{a}{6 \operatorname{sen} 3\alpha - 2 \operatorname{tg}\alpha \cos 3\alpha}}$$

4) $\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} \qquad \underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix}$

En P: $\theta = 0, r = h$

Por tanto:

$$\underline{T}_p = \begin{pmatrix} -6Ah + 2Bh & 0 \\ 0 & 6Ah + 6Bh \end{pmatrix}$$

$$\bar{t}_p = \begin{pmatrix} -6Ah + 2Bh & 0 \\ 0 & 6Ah + 6Bh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6Ah + 6Bh \end{pmatrix}$$

↑

ojo en polares

Y en S: $\theta = \alpha$, $r = h$

$$\underline{T}_s = \begin{pmatrix} h(-6A\cos 3\alpha + 2B\cos\alpha) & 2h(3A \operatorname{sen} 3\alpha + B \operatorname{sen}\alpha) \\ 2h(3A \operatorname{sen} 3\alpha + B \operatorname{sen}\alpha) & 6h(A\cos 3\alpha + B\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\bar{t}_s = \underline{T}_s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h(3A \operatorname{sen} 3\alpha + B \operatorname{sen}\alpha) \\ 6h(A\cos 3\alpha + B\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

NOTA: Problema de función de Airy en polares.

Polar 9.

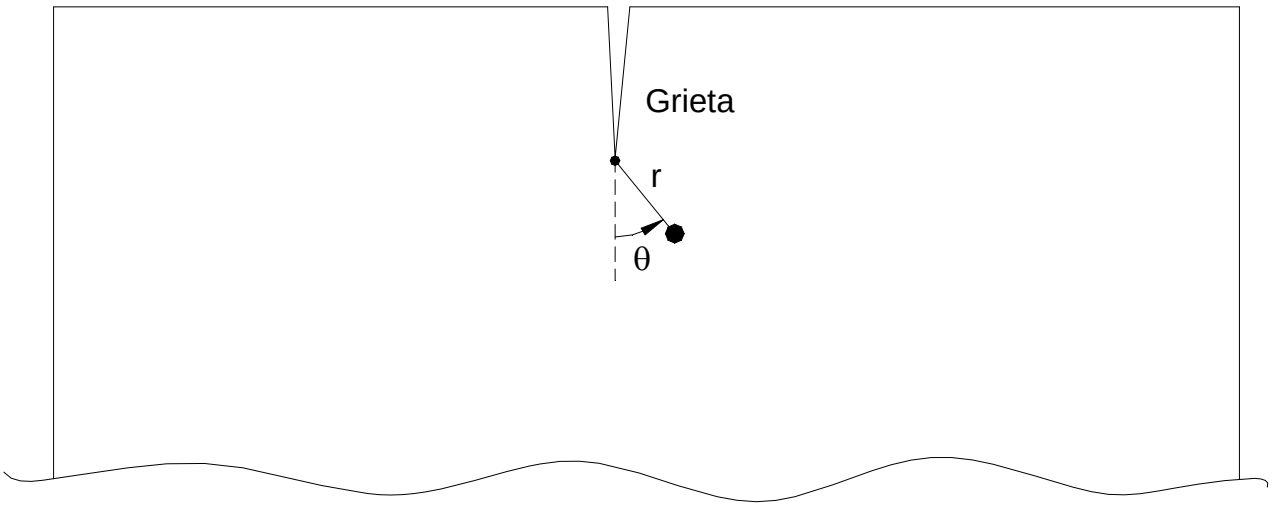
Una función de tensiones en coordenadas polares (r, θ) tiene la forma: $\Phi(r, \theta) = r^{3/2} f(\theta)$. Se pide:

1. Encontrar la expresión de $f(\theta)$.

Dicha función de tensiones se aplica a una chapa infinita, que tiene una grieta de abertura despreciable, cuyos bordes están libres de tensiones. Se sabe además que en r = 16 m, θ = 0º, la tensión radial vale 60 kN/m².

2. Encontrar las expresiones de σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$.

(Examen de septiembre de 1998)



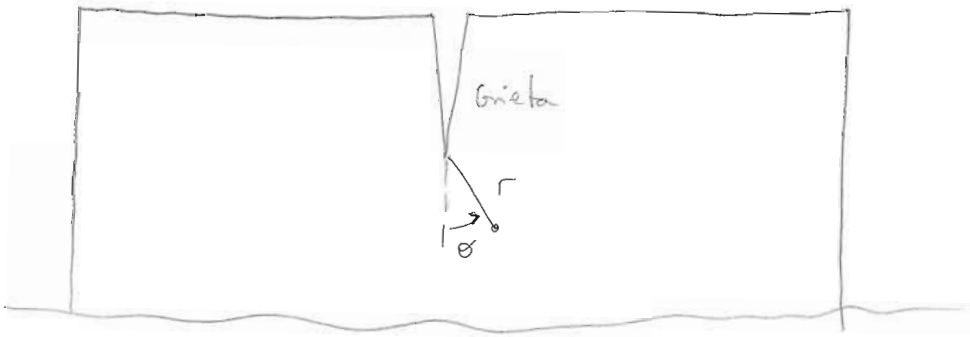
Enunciado: EXAMEN SEPTIEMBRE 1998 (40') Polar 9

Una función de tensiones en coordenadas polares (r, θ) tiene la forma $\phi(r,\theta) = r^{3/2} \cdot f(\theta)$. Se pide:

1) Encontrar la expresión de $f(\theta)$.

Dicha función de tensiones se aplica a una chapa infinita que tiene una grieta de abertura despreciable, cuyos bordes están libres de tensiones. Se sabe además que en $(r = 16\ m,\ \theta = 0°)$, la tensión radial vale $60\ kN/m^2$.

2) Encontrar las expresiones de σ_r, σ_θ y $\tau_{r\theta}$.



Resolución:

1) La función ϕ debe cumplir:

- Ecuaciones de equilibrio interno.
- Compatibilidad de deformaciones.
- Condiciones de contorno.

si ϕ biarmónica cumple ambas.

$$\nabla^4 \phi = 0 \qquad \nabla^2 \phi = \sigma_r + \sigma_\theta$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{3}{2} r^{1/2} \cdot f(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{3}{4} r^{-1/2} f(\theta)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r^{3/2} \cdot f'(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = r^{3/2} \cdot f''(\theta)$$

De donde:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{3}{2} r^{1/2} f(\theta) + \frac{1}{r^2} r^{3/2} f''(\theta) = \frac{3}{2} r^{-1/2} \cdot f(\theta) + r^{-1/2} \cdot f''(\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3}{4} r^{-1/2} f(\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{1/2} \cdot f'(\theta)\right] = -\frac{1}{2} r^{-1/2} \cdot f'(\theta)$$

Biarmónica:

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{9}{4} r^{-1/2} f(\theta) + r^{-1/2} f''(\theta) = r^{-1/2}\left[\frac{9}{4} f(\theta) + f''(\theta)\right]$$

con $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r + \sigma_\theta) = -\frac{1}{2} r^{-3/2}\left[\frac{9}{4} f(\theta) + f''(\theta)\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{3}{4} r^{-5/2}\left[\frac{9}{4} f(\theta) + f''(\theta)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_r + \sigma_\theta) = r^{-1/2}\left[\frac{9}{4} f'(\theta) + f'''(\theta)\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = r^{-1/2}\left[\frac{9}{4} f''(\theta) + f^{IV}(\theta)\right]$$

Por tanto:

$$\frac{3}{4} r^{-5/2}\left[\frac{9}{4} f(\theta) + f''(\theta)\right] - \frac{1}{2} r^{-5/2}\left[\frac{9}{4} f(\theta) + f''(\theta)\right] + r^{-5/2}\left[\frac{9}{4} f''(\theta) + f^{IV}(\theta)\right] = 0$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{9}{4} f(\theta) + f''(\theta)\right] + \left[\frac{9}{4} f''(\theta) + f^{IV}(\theta)\right] = 0$$

$$f^{IV}(\theta) + \frac{5}{2} f''(\theta) + \frac{9}{16} f(\theta) = 0$$

Hay que integrar esta ecuación diferencial.
La ecuación característica es:

$$t^4 + \frac{5}{2} t^2 + \frac{9}{16} = 0$$

Las raíces son:

$$\left| \begin{array}{l} t_1 = \frac{i}{2} \\ t_2 = \frac{-i}{2} \\ t_3 = \frac{3i}{2} \\ t_4 = \frac{-3i}{2} \end{array} \right.$$

Las soluciones particulares de la ecuación diferencial son:

$$y_1 = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$y_2 = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$y_3 = \cos\frac{3\theta}{2}$$

$$y_4 = \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}$$

y la solución general será:

$$f(\theta) = A \cdot \cos\frac{\theta}{2} + B \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + C \cdot \cos\frac{3\theta}{2} + D \cdot \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}$$

Con A, B, C y D constantes a determinar. Por tanto:

$$\sigma_r = r^{-1/2}\left[\frac{3}{2} f(\theta) + f''(\theta)\right] = r^{-1/2}\left[\frac{3}{2} A \cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} B \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} C \cos\frac{3\theta}{2} + \frac{3}{2} D \cdot \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} - \frac{A}{4}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{B}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \frac{9C}{4}\cos\frac{3\theta}{2} - \frac{9D}{4}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_r = r^{-1/2}\left[\frac{5A}{4}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{5B}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \frac{3C}{4}\cos\frac{3\theta}{2} - \frac{3D}{4}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right] \\ \sigma_\theta = r^{-1/2}\left[\frac{3A}{4}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3B}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \frac{3C}{4}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{3D}{4}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right] \\ \tau_{r\theta} = r^{-1/2}\left[\frac{A}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \frac{B}{4}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3C}{4}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} - \frac{3D}{4}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \end{array} \right.$$

Aplicando las condiciones de contorno:

- En $\theta = \pm\pi \Rightarrow \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$

$\theta = \pi \rightarrow \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\theta = -\pi \rightarrow \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} -\tau_{r\theta} \\ -\sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\sigma_\theta = 0 = r^{-1/2}\left[\frac{3B}{4} - \frac{3D}{4}\right] = 0 \Rightarrow B = D \qquad (\mathrm{I})$$

$$\tau_{r\theta} = 0 = r^{-1/2}\left[\frac{A}{4} - \frac{3C}{4}\right] = 0 \Rightarrow A = 3C \qquad (\mathrm{II})$$

- En $(r = 16, \theta = 0^\circ) \Rightarrow \sigma_r = 60$

$$16^{-1/2}\left[\frac{5A}{4} - \frac{3C}{4}\right] = 60 \Rightarrow 5A - 3C = 960 \qquad (\mathrm{III})$$

- Simetría: $f(\theta) = f(-\theta)$

$$A \cdot \cancel{\cos\frac{\theta}{2}} + B \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + C \cancel{\cos\frac{3\theta}{2}} + D \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} = A \cancel{\cos\frac{\theta}{2}} - B \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + C \cancel{\cos\frac{3\theta}{2}} - D \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}$$

$$2B \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + 2D \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} = 0 \quad \forall\theta \Rightarrow B = 0$$

$D = 0$

$A = 240$

$C = 80$

Por tanto:

$$\boxed{f(\theta) = 240 \cos\frac{\theta}{2} + 80 \cdot \cos\frac{3\theta}{2}}$$

2) Y las expresiones de las tensiones serán:

$$\sigma_r = r^{-1/2} \cdot \left[300 \cdot \cos\frac{\theta}{2} - 60 \cdot \cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_\theta = r^{-1/2} \cdot \left[180 \cdot \cos\frac{\theta}{2} + 60 \cdot \cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\tau_{r\theta} = r^{-1/2} \cdot \left[60 \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + 60 \cdot \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right]$$

NOTA: Problema de función de Airy en polares

Enunciado: Polar10

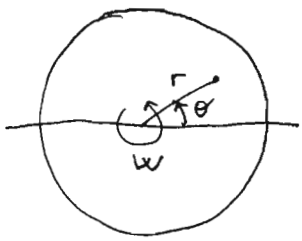
Un disco delgado de radio $R = 0'20$ m gira en torno al eje de simetría perpendicular a su plano a razón de $n = 15000$ rpm. Sobre el disco, cuya densidad es $\delta = 16$ kN/m³, coeficiente de Poisson $\nu = 0'25$ y módulo de elasticidad $E = 5 \cdot 10^3$ MPa no actúa otra solicitación que no sea la fuerza centrífuga. Se pide:

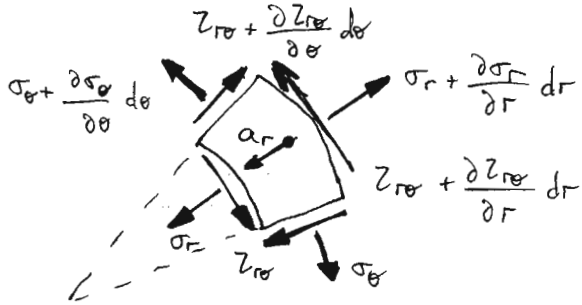
1) Obtener la expresión del corrimiento en cualquier punto.
2) Estudiar el estado tensional creado por la rotación en los puntos del disco, representando gráficamente las tensiones principales en los puntos de un radio.
3) Calcular la variación de la longitud del radio del disco.

Repetir el apartado 1 si en el disco existe un agujero concéntrico de radio $r = R_i$.

Resolución:

1) Aparecen fuerzas de inercia.





Como la fuerza centrífuga es una fuerza de inercia, no puedo usar la función de Airy, ya que en polares no tiene en cuenta fuerzas de inercia.

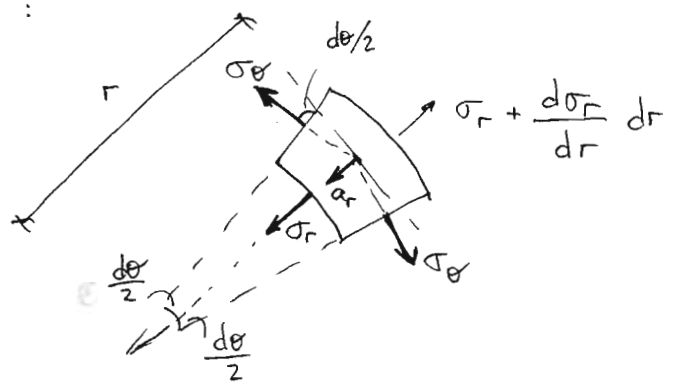
a_r la pongo hacia adentro por ser centrífuga. Centrípeta sería hacia afuera.

Como el disco tiene simetría radial, nada puede depender de θ.

Por tanto, $\tau_{r\theta} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Las tensiones sólo van a depender de r.

Por tanto:



e = espesor del disco

Planteando el equilibrio: $(F = m \cdot a)$

$$\Sigma F_r = -dm \cdot a_r \longrightarrow d\sigma_r \cdot d\Omega - 2\sigma_\theta \frac{d\theta}{2} \cdot d\Omega = -dm \cdot a_r$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

$$d\Omega = (r + dr)\, d\theta \cdot e \qquad dm = r^2 d\theta \cdot e \cdot \delta$$

Operando:

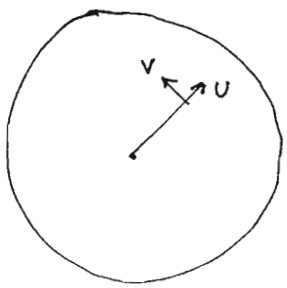
$$d\sigma_r \cdot (r + dr)\, d\theta \cdot e - \sigma_\theta \cdot d\theta\, (r + dr)\, d\theta \cdot e = -dm \cdot \omega^2 \cdot r$$

También se puede llegar, más fácilmente, mediante la ecuación de equilibrio interno en polares.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + f_r = 0 \qquad \text{con } f_r = \delta \omega^2 r \quad (\text{ojo, tenemos}$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \delta \omega^2 r = 0$$

Para poder operar esto hay que dejarlo en función de una variable. Por ello utilizamos los movimientos.



$$u = u(r)$$

$$v = 0$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0$$

LAMÉ $\Longrightarrow$ TENSIÓN PLANA

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r\right]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Sustituyendo:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right]$$

Con estas expresiones se entra en la ecuación de equilibrio interno obtenida antes:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \delta\cdot\omega^2\cdot r = 0$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2u}{dr^2} - \cancel{\frac{\nu u}{r^2}}\right) + \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \cancel{\frac{\nu\cdot u}{r^2}} - \frac{u}{r^2} - \frac{\nu}{r}\frac{du}{dr}\right) + \delta\cdot\omega^2\cdot r = 0$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{(1-\nu)}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{(1-\nu^2)}{E}\cdot\delta\cdot\omega^2\cdot r = 0 \qquad \text{Ec. diferencial}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{(1-\nu)}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -K\cdot r \qquad K = \frac{(1-\nu^2)}{E}\delta\cdot\omega^2$$

Habría que integrar esto, y después averiguar las constantes con las condiciones de contorno. Resolviendo sale:

$$u(r) = \frac{(1-\nu^2)\,\delta\,\omega^2}{8E}\left[-r^3 + \frac{(3+\nu)R^2}{1+\nu}r\right]$$

$$\sigma_r = \frac{(3+\nu)\cdot\delta\cdot\omega^2}{8}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\delta\cdot\omega^2}{8}\left[(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2\right]$$

2) Las tensiones principales serán σ_r y σ_θ, ya que $\tau_{r\theta}=0$

3) $u(r=R) = \Delta R$

4) Si el disco tiene un agujero concéntrico el planteamiento del problema no cambia. Lo que sí cambian son las condiciones de contorno.

NOTA: Problema de tensión plana en polares, con fuerzas de inercia.

Enunciado: **EXAMEN DE JUNIO DE 2001** (45') Polar II

Un disco de material elástico de pequeño espesor e y radio R se somete en su perímetro a una compresión radial de valor p. Considerando un sistema de coordenadas polares con origen en el centro del disco, se pide:

1) Componentes del tensor de tensiones en los puntos del disco situados a R/2 del origen.

2) Acortamiento d, del radio R.

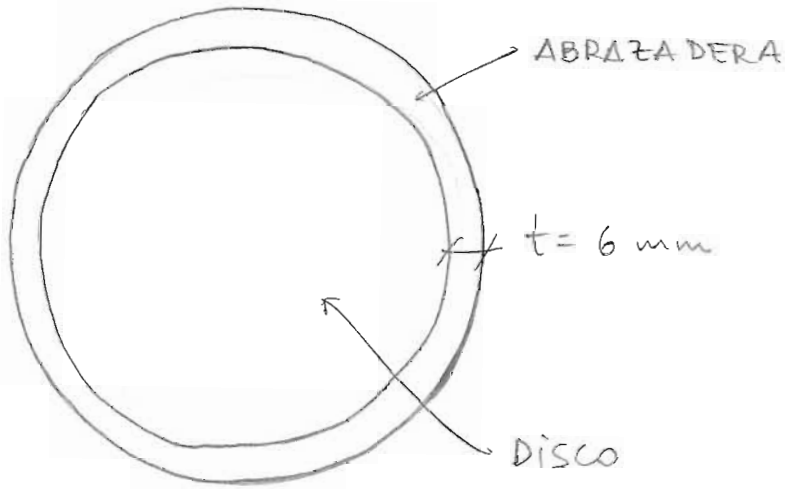
Cuando el radio del disco alcanza el valor R-d se coloca una abrazadera elástica, de ancho e, igual al espesor del disco, y grosor t, alrededor del disco y se retira la compresión radial. A partir de esa situación, se pide:

3) Tensión circunferencial en la abrazadera, considerando que es la misma en todo su grosor.

4) Acortamiento final del radio del disco.

Datos:
- $p = 0'20$ MPa ; $R = 0'50$ m
- Disco: $E_1 = 10^5$ MPa, $\nu = 0'30$ m.
- Abrazadera: $E_2 = 2 \cdot 10^6$ MPa, $\nu = 0'30$, $t = 6$ mm.

NOTA: Para resolver los dos últimos apartados se considerará que el radio del disco y de la abrazadera es R, y no R-d, en las expresiones donde intervenga.

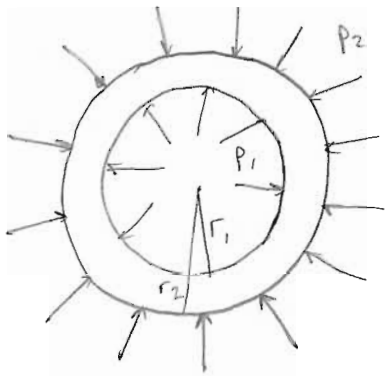


Resolución:

1) Se está en un problema de tensión plana, por ser un disco de pequeño espesor con cargas contenidas en su plano.

$$\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0$$

Utilizando las fórmulas del formulario de la Escuela (tubo circular sometido a presiones radiales):



$$\left|\begin{array}{l} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta = \dfrac{-A}{r^2} + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array}\right. \quad \text{con} \quad \left|\begin{array}{l} A = -\dfrac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \\ 2C = \dfrac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{array}\right.$$

En nuestro caso:

$$\left|\begin{array}{l} r_1 = 0 \text{ m} \\ r_2 = 0'50 \text{ m} \\ p_1 = 0 \\ p_2 = 0'20 \text{ MPa} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{sustituyendo}} \left|\begin{array}{l} A = 0 \\ 2C = -p_2 = -p = -0'20 \text{ MPa} \\ \sigma_r = \sigma_\theta = -p = -0'20 \text{ MPa} \end{array}\right.$$

Por tanto, el tensor de tensiones es constante en todo el disco e igual a:

$$T = \begin{pmatrix} -200 & 0 \\ 0 & -200 \end{pmatrix} \text{ KN/m}^2$$

- Otra manera:

Al tener simetría axil:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + 2B + C(1 + 2\ln r) \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + 2B + C(3 + 2\ln r) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array}\right.$$

Aplicando las condiciones de contorno:

- En $r = R$: $\sigma_r = -p$

$$\frac{A}{R^2} + 2B + C\left(1 + \ln R\right) = -p \qquad (I)$$

- En $r = 0$ $\longrightarrow$ $A = C = 0$, ya que de otra manera saldrían indeterminaciones

Sustituyendo en (I) $\rightarrow$ $2B = -p$ $\rightarrow$ $B = -p/2$

Por tanto:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_r = -p \\ \sigma_\theta = -p \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array}\right.$$

2) Acortamiento del radio:

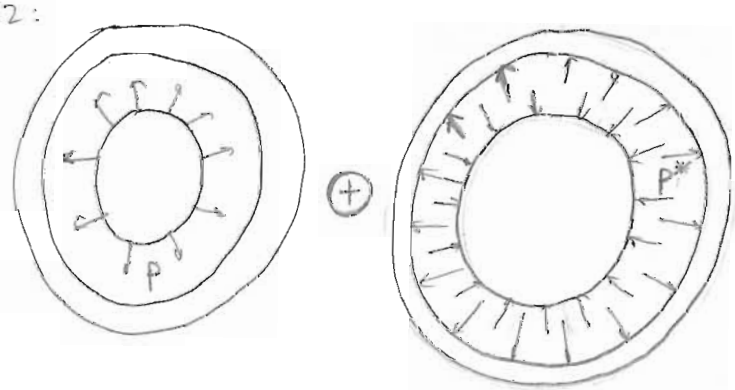
$$\boxed{U = \frac{r}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right) = \frac{0'5}{10^5}\left(-0'2 - 0'3\cdot(-0'2)\right) = -7\cdot 10^{-7}\,m}$$

3) Tensión circunferencial en la abrazadera.

Al poner la abrazadera y retirar p, el disco intentará expandirse y volver a su situación inicial. Al ser la abrazadera tambien elástica, se deformará para acompañar al disco, hasta llegar al equilibrio.

Por lo tanto, el efecto de eliminar la presión p es como meterla en sentido contrario. Es como si tuviéramos dos estados E1 (DISCO: $q_D = p$, AB: $q_A = 0$) E2 (D: $q_D = p - p^*$, $q_A = p^*$)

E2:



DISCO: $q_D = p - p^*$

ABRAZADERA: $q_A = p^*$

ESTADO 2

El problema sigue siendo de tensión plana y simetría axil.
Hay que imponer igualdad de deformaciones.

$$U_{DISCO}(r=R) = U_{ABRAZADERA}(r=R)$$

• DISCO:

proporcionalidad

$$U_{DISCO} = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\cdot\sigma_r) = \frac{7\cdot 10^{-7}}{200}(p-p^*) = 3'5\cdot 10^{-9}(p-p^*)$$

• ABRAZADERA:

$$\left|\begin{array}{l} r_1 = 0'50 \text{ m} \\ r_2 = 0'50 + 0'006 = 0'506 \text{ m} \\ p_1 = p^* \\ p_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$A = -\frac{0'50^2\cdot 0'506^2\ p^*}{0'506^2 - 0'50^2} = -10'605\cdot p^*$$

$$2C = \frac{p^*\cdot 0'5^2}{0'506^2 - 0'5^2} = 41'418\ p^*$$

$$\sigma_r = \frac{-10'605\ p^*}{r^2} + 41'418\cdot p^*$$

$$\sigma_\theta = \frac{10'605\ p^*}{r^2} + 41'418\ p^*$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Por tanto:

$$U_{ABRAZADERA} = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\cdot\sigma_r) = \frac{0'50}{2\cdot 10^9}\left(\frac{10'605\ p^*}{0'5^2} + 41'418\ p^* + \frac{3'1815\ p^*}{0'5^2} - 12'4254\ p^*\right)$$

$$U_{ABRAZADERA} = 2'1035\cdot 10^{-8}\ p^*$$

Igualando: $3'5\cdot 10^{-9}(200 - p^*) = 2'1035\cdot 10^{-8}\ p^*$

$$200 - p^* = 6p^* \rightarrow \boxed{p^* = 28'571 \ KN/m^2}$$

Y la tensión circunferencial en la abrazadera será:

$$\boxed{\sigma_\theta = \frac{10'605 \cdot 28'571}{0'5^2} + 41'418 \cdot 28'571 = 2395'34 \ KN/m^2}$$

4) Acortamiento final del radio del disco:

$$U_{DISCO}^{E1} = -7 \cdot 10^{-7} \ m$$

$$U_{DISCO}^{E2} = 3'5 \cdot 10^{-9} \left(200 - 28'571\right) = 6 \cdot 10^{-7}$$

Por tanto:

$$\boxed{U_{DISCO}^{FINAL} = -7 \cdot 10^{-7} + 6 \cdot 10^{-7} = -10^{-7} \ m}$$

NOTA: Problema de compatibilidad de movimientos entre dos cuerpos

Polar 12.

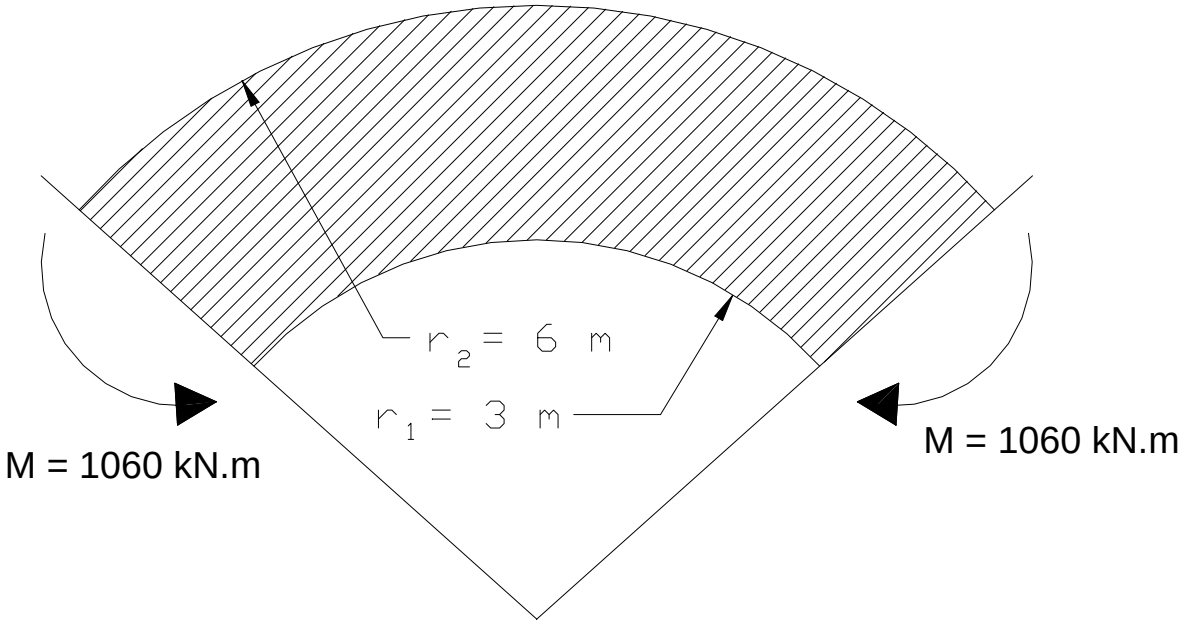
Un arco circular plano de radio exterior r_2 = 6 m y radio interior r_1 = 3 m tiene una sección transversal constituida por un rectángulo de pequeño espesor e = 1. Se encuentra sometido a una flexión producida por dos momentos opuestos M y –M, de valor absoluto 1060 m·kN, aplicados en sus extremos. Se pide:

1. Si se plantea el problema en tensiones, indicar las condiciones que debe cumplir la función de tensiones $\phi = \phi(r, \theta)$ del problema.

2. Si la función de tensiones es de la forma $\phi(r, \theta) = A \cdot \ln r + B \cdot r^2 \cdot \ln r + C \cdot r^2$
   ¿Es esta función solución del problema tensional anterior?

3. Determinar las tensiones que aparecen aplicadas en una sección recta, indicando los valores máximos.

4. Comprobar el orden de magnitud de los resultados obtenidos en el apartado anterior, mediante la expresión correspondiente de Resistencia de Materiales.



Enunciado: Polar 12

Un arco circular plano de radio exterior $r_2 = 6$ m y radio interior $r_1 = 3$ m tiene una sección transversal constituida por un rectángulo de pequeño espesor $e = 1$. Se encuentra sometido a una flexión producida por dos momentos opuestos M y $-M$, de valor absoluto 1060 KN·m, aplicados en sus extremos. Se pide:

1) Si se plantea el problema en tensiones, indicar las condiciones que debe cumplir la función de tensiones $\phi = \phi(r, \theta)$ del problema.

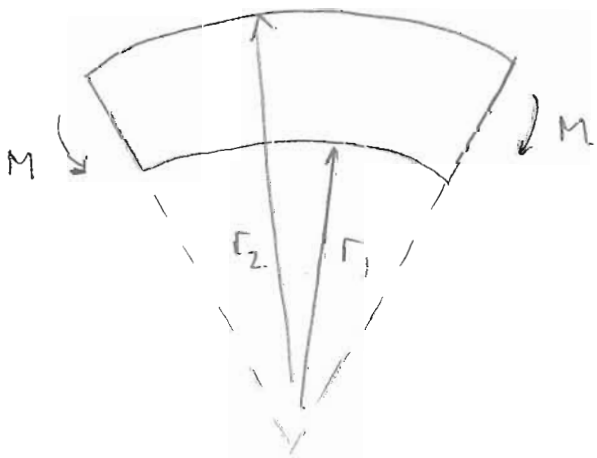
2) Si la función de tensiones es de la forma

$$\phi = A \cdot \ln r + B \cdot r^2 \cdot \ln r + C r^2$$

¿Es esta función solución del problema tensional anterior?

3) Determinar las tensiones que aparecen aplicadas en una sección recta, indicando los valores máximos.

4) Comprobar el orden de magnitud de los resultados obtenidos en el apartado anterior, mediante la expresión correspondiente de Resistencia de Materiales.



Resolución:

1) Al ser el espesor pequeño, y estar las cargas exteriores contenidas en el plano de la placa, se está en un caso de tensión plana.

Por tanto:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_z = 0 \\ \tau_{rz} = 0 \\ \tau_{\theta z} = 0 \end{array}\right.$$

Las tensiones derivadas de la función de Airy, de acuerdo con las siguientes expresiones, satisfacen automáticamente las ecuaciones de equilibrio.

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = \frac{-\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right] \end{array}\right.$$

Además, deberán satisfacerse las condiciones de compatibilidad, por lo que la función de Airy debe ser biarmónica, y también las condiciones de contorno

2) $\phi(r,\theta) = A \cdot \ln r + B r^2 \ln r + C \cdot r^2$

Las tensiones derivadas de esta función de Airy son:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r} + 2Br\ln r + B \cdot r + 2Cr$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{-A}{r^2} + 2B\ln r + 3B + 2C$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

Por tanto:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2B\ln r + B + 2C \\ \sigma_\theta = \frac{-A}{r^2} + 2B\ln r + 3B + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array}\right.$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4B\ln r + 4B + 4C$$

Para ser biarmónica:

$$\nabla^2(\sigma_r+\sigma_\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left[4B\ln r + 4B + 4C\right] = \frac{-4B}{r^2} + \frac{4B}{r^2} = 0 \checkmark$$

Ahora hay que utilizar las condiciones de contorno:

- <u>Contorno exterior $r = r_2$:</u> $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_r = 0 = \frac{A}{r_2^2} + 2B\ln r_2 + B + 2C \longrightarrow \boxed{A + 165\cdot B + 72\cdot C = 0} \quad (\mathrm{I})$$

$\tau_{r\theta} = 0 \checkmark$

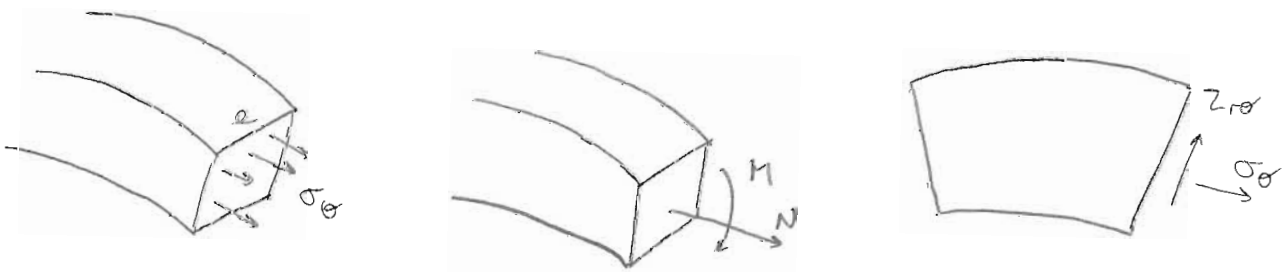
- <u>Contorno interior $r = r_1$:</u> $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} = \begin{bmatrix} -\sigma_r \\ -\tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_r = 0 = \frac{A}{r_1^2} + 2B\ln r_1 + B + 2C \longrightarrow \boxed{A + 28'78\,B + 18\,C = 0} \quad (\mathrm{II})$$

$\tau_{r\theta} = 0 \checkmark$

- <u>Lateral derecho:</u> $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix}$$

La distribución de tensiones será únicamente normal, y dará lugar al momento exterior existente. No hay axil. No hay cortante.

$\tau_{r\theta} = 0$ ✓

$$N = 0 = \iint_{\Omega} \sigma_\theta \, d\Omega = \int_{r_1=3}^{r_2=6} \left[\frac{-A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C \right] \cdot e \cdot dr$$

FORMULARIO:

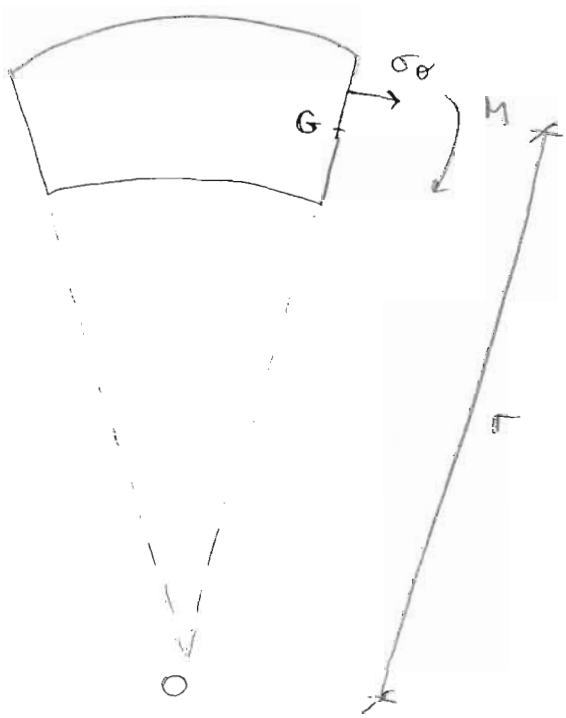
$$\boxed{\begin{aligned} &\int r \ln r \, dr = \frac{r^2}{4} \left[2 \ln r - 1 \right] \\ &\int \frac{1}{r^2} dr = \frac{-1}{r} \\ &\int \ln r \, dr = r \ln r - 1 \end{aligned}}$$

Por tanto:

$$N = 0 = \left[\frac{A}{r} + 2Br \ln r - 2Br + 3Br + 2Cr \right] \Bigg|_3^6 \cdot 1 = 0$$

$$\boxed{A - 107'457\, B - 36C = 0} \quad (\text{III})$$

Resolviendo las tres ecuaciones: $A = B = C = 0$. Necesitamos alguna ecuación más.



Al ser $N=0$, se pueden tomar momentos con respecto a cualquier punto, por ejemplo O.

$$dM = \sigma_\theta \cdot r \cdot d\Omega$$

$$M = \iint_\Omega \sigma_\theta \cdot r \cdot d\Omega = \int_{r_1=3}^{r_2=6} \left[\frac{-A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C \right] r \cdot e \cdot dr$$

Resolviendo:

$$M = -0'693 \cdot A + 81'616 \cdot B + 27 \cdot C = 1060$$

$$\boxed{A - 117'772\, B - 38'961 \cdot C = -1529'582} \quad (\mathrm{IV})$$

Resolviendo el sistema con (I), (II) y (IV):

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 8884'168 \\ B &= 534'333 \\ C &= -1347'903 \end{aligned}}$$

Y la ecuación (III) se cumple.

Por lo tanto, la función de Airy solución del problema es:

$$\boxed{\phi(r,\theta) = 8884'168 \cdot \ln r + 534'333 \cdot r^2 \ln r - 1347'903 \cdot r^2}$$

3) Las tensiones que aparecen aplicadas en una sección recta son:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{8884'168}{r^2} + 1068'666 \cdot \ln r - 2161'473 \\ \sigma_\theta &= \frac{-8884'168}{r^2} + 1068'666 \cdot \ln r - 1092'807 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}}$$

El tensor de tensiones es $\begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix}$

Las tensiones máximas son:

σ_r máximos $\rightarrow \dfrac{d\sigma_r}{dr} = \dfrac{-2 \cdot 8884'168}{r^3} + \dfrac{1068'666}{r} = 0$

$$\frac{17768'336}{r^2} = 1068'666 \rightarrow r = 4'0776 \text{ m}$$

MÍNIMO

$\boxed{\sigma_r (r=4'0776) = -125'126 \text{ KN/m}^2}$

MÁXIMO

$\boxed{\sigma_r (r=3) = \sigma_r (r=6) = 0}$

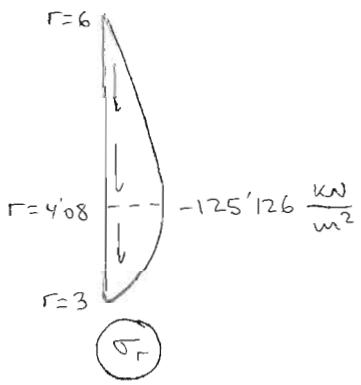
σ_θ máximo $\rightarrow \dfrac{d\sigma_\theta}{dr} = \dfrac{2 \cdot 8884'168}{r^3} + \dfrac{1068'666}{r} = 0 \rightarrow r$ imaginario

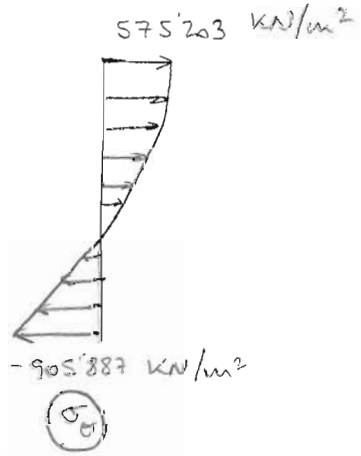
$\boxed{\sigma_\theta (r=3) = -905'887 \text{ KN/m}^2}$ MÍNIMO

$\boxed{\sigma_\theta (r=6) = 575'203 \text{ KN/m}^2}$ MÁXIMO

$\boxed{\tau_{r\theta} = 0 \text{ KN/m}^2}$

Gráficamente:

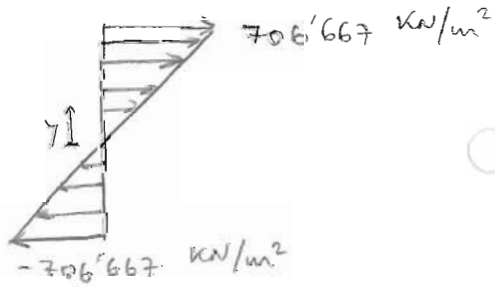




4) En Resistencia de Materiales no hay expresión para σ_r. La expresión para σ_θ es:

$$\sigma_\theta = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{-1060 \cdot y}{\frac{1}{12} 1 \cdot 3^3} = -471'111 \cdot y$$

$\tau_{r\theta} = 0$ ya que la ley de cortantes es 0.



NOTA: Tensión plana en polares.

Polar 13.

En el problema de deformación plana de la figura, en la que la única carga actuante es una acción repartida de intensidad p normal al lado OB, se supone que la función de tensiones de Airy en coordenadas polares es de la forma:

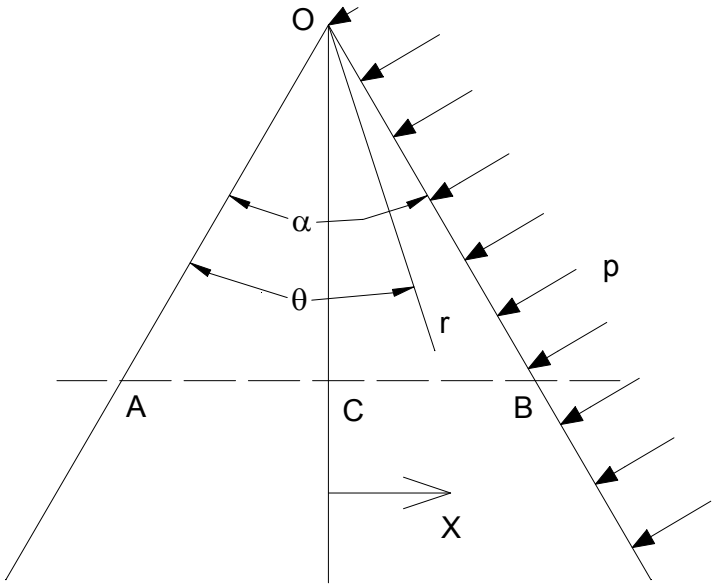
$$\phi\,(r,\theta) = r^2 \cdot f(\theta)$$

Se pide:

1. Determinar la función $f(\theta)$.
2. Dibujar la ley de variación de las tensiones normales al plano ACB, en función de la abscisa x indicada en la figura, que dista h del vértice O. Indicar los valores en MPa en los extremos A y B, y en su punto medio C.
3. Esfuerzos momento flector M y axil N en dicha sección.

(Examen de septiembre de 1998)

DATOS: $p = 20\ kN/m^2$; $\alpha = \pi / 6$



Enunciado: Polar 13 **EXAMEN SEPTIEMBRE 1998** (45')

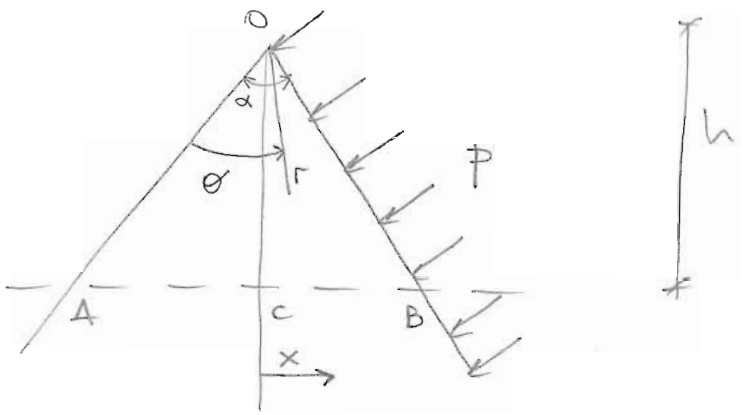
En el problema de deformación plana de la figura, en la que la única carga actuante es una acción repartida de intensidad p, normal al lado OB, se supone que la función de tensiones de Airy en coordenadas polares es de la forma:

$$\phi(r,\theta) = r^2 \cdot f(\theta)$$

Se pide:

1) Determinar la función $f(\theta)$
2) Dibujar la ley de variación de las tensiones normales al plano ACB, en función de la abcisa x indicada en la figura, que dista h del vértice O. Indicar los valores en MPa en los extremos A y B, y en su punto medio C.
3) Esfuerzos momento flector M y axil N en dicha sección.

DATOS: $p = 20\ KN/m^2$ $\alpha = \pi/6$.



Resolución

1) La función de Airy debe ser biarmónica y cumplir las condiciones de contorno del problema.

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \frac{1}{r}2r f(\theta) + \frac{1}{r^2} r^2 f''(\theta) = 2\cdot f + f''$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 2\cdot f$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right] = \frac{-\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} r^2 f'(\theta)\right] = -f'$$

Para comprobar si es biarmónica:

$$\nabla^2 \phi = \sigma_r + \sigma_\theta = 4 \cdot f + f''$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left[4f + f'' \right] = \frac{1}{r^2} \left[4f'' + f^{IV} \right] = 0$$

$$f^{IV} + 4 \cdot f'' = 0 \longrightarrow \text{Ecuación diferencial de coefs. ctes y homogénea}$$

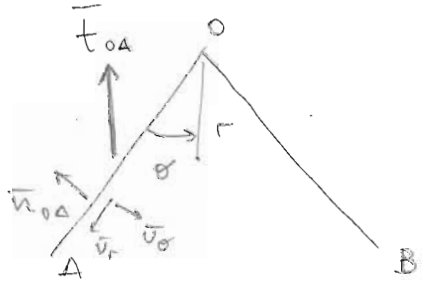
Ecuación característica: $t^4 + 4 \cdot t^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = 0 \longrightarrow e^{t_1 \cdot \theta}, \theta \cdot e^{t_2 \cdot \theta} \\ \left.\begin{matrix} t_3 = 2i \\ t_4 = -2i \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \\ e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen}(\beta x) \end{cases} \end{cases}$

La solución general es:

$$f(\theta) = A \cdot 1 + B \cdot \theta + C \cdot \cos 2\theta + D \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

Ahora hay que aplicar las condiciones de contorno:

- Lado OA: $\theta = 0$



$$\bar{t}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{OA} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_{r\theta} \\ -\sigma_\theta \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \tau_{r\theta} = 0 \\ \sigma_\theta = 0 \end{matrix}$$

Hay que sustituir las expresiones de f, f' y f'' en las de las tensiones

$$\begin{cases} f = A + B\theta + C \cos 2\theta + D \operatorname{sen} 2\theta \\ f' = B - 2C \operatorname{sen} 2\theta + 2D \cos 2\theta \\ f'' = -4C \cos 2\theta - 4D \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$$

Por tanto:

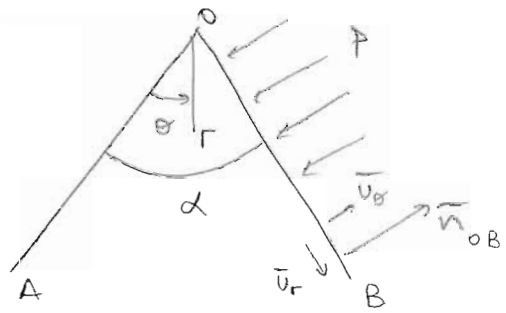
$$\begin{cases} \sigma_r = 2A + 2B\theta - 2C \cos 2\theta - 2D \operatorname{sen} 2\theta \\ \sigma_\theta = 2A + 2B\theta + 2C \cos 2\theta + 2D \operatorname{sen} 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -B + 2C \operatorname{sen} 2\theta - 2D \cos 2\theta \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\sigma_\theta(\theta=0) = 0 = 2A + 2C \longrightarrow A + C = 0 \quad (I)$$

$$\tau_{r\theta}(\theta=0) = 0 = -B - 2D \longrightarrow B + 2D = 0 \quad (II)$$

• Lado OB: $\theta = \alpha = \pi/6$



$$\bar{t}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \tau_{r\theta} = 0 \\ \sigma_\theta = -p \end{matrix}$$

Sustituyendo:

$$\sigma_\theta = -p = 2A + 2B\alpha + 2C\cos 2\alpha - 2D \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\tau_{r\theta} = 0 = -B + 2C \operatorname{sen} 2\alpha - 2D\cos 2\alpha = 0$$

Con los valores del enunciado: $\alpha = \pi/6$

$$2A + 1'0472 \cdot B + C - 1'73205 \cdot D = -20 \quad (III)$$

$$-B + 1'73205 \cdot C - D = 0 \quad (IV)$$

Resolviendo:

$$\left| \begin{matrix} A = 3'554 \\ B = -12'312 \\ C = -3'554 \\ D = 6'156 \end{matrix} \right.$$

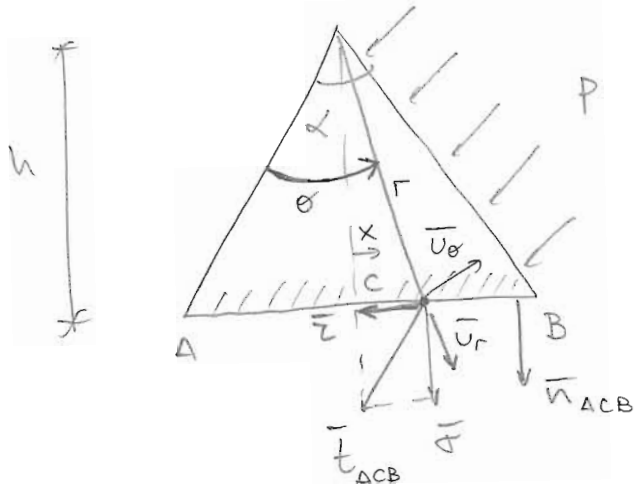
Sustituyendo:

$$\boxed{f(\theta) = 3'554 - 12'312 \cdot \theta - 3'554 \cdot \cos 2\theta + 6'156 \cdot \operatorname{sen} 2\theta}$$

Y las tensiones:

$$\left| \begin{matrix} \sigma_r = 7'108 - 24'622 \cdot \theta + 7'108 \cdot \cos 2\theta - 12'312 \cdot \operatorname{sen} 2\theta \\ \sigma_\theta = 7'108 - 24'622 \cdot \theta - 7'108 \cdot \cos 2\theta + 12'312 \cdot \operatorname{sen} 2\theta \\ \tau_{r\theta} = 12'312 - 7'108 \cdot \operatorname{sen} 2\theta - 12'312 \cdot \cos 2\theta \end{matrix} \right.$$

2) Ley de tensiones normales en ACB



$$\bar{n}_{ACB} = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{ACB} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n}_{ACB} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r \cdot \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \tau_{r\theta} \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \\ \tau_{r\theta} \cdot \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma_\theta \cdot \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Y la tensión normal será:

$$\sigma = \bar{n}_{ACB}^T \cdot \bar{t}_{ACB} = \sigma_r \cdot \cos^2\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - 2\tau_{r\theta} \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) + \sigma_\theta \cdot \operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Ahora hay que ponerlo en función de x:

$$tg\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{h} \qquad r = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} \qquad \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\sigma = \sigma_r \cdot \frac{h^2}{x^2+h^2} - 2 \cdot \tau_{r\theta} \cdot \frac{x \cdot h}{x^2+h^2} + \sigma_\theta \cdot \frac{x^2}{x^2+h^2}}$$

PUNTO A: $\theta = 0$, $x = -0'268 \cdot h$ — $\boxed{\sigma_A = 0'013 \text{ MPa}}$

$\sigma_r = 14'216$ KN/m²
$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ KN/m²

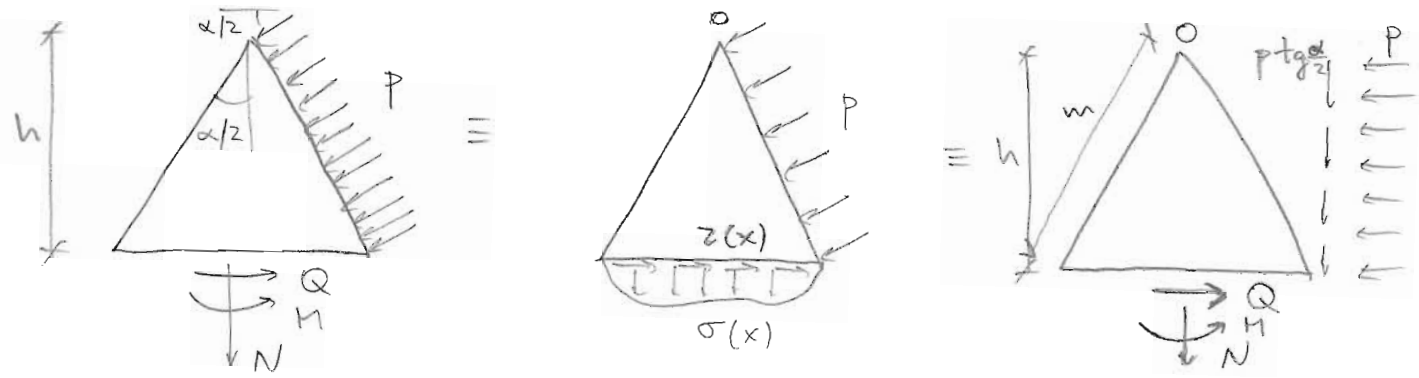
PUNTO B: $\theta = \pi/6$, $x = 0'268 \cdot h$ — $\boxed{\sigma_B = -0'012 \text{ MPa}}$

$\sigma_r = -12'893$ KN/m²
$\sigma_\theta = 1'325$ KN/m²
$\tau_{r\theta} = 0$ KN/m²

PUNTO C: $\theta = \pi/12$, $x = 0$ — $\boxed{\sigma_C = 0'005 \text{ MPa}}$

$\sigma_r = 0'662$ KN/m²
$\sigma_\theta = 0'662$ KN/m²
$\tau_{r\theta} = -1'905$ KN/m²

3) Esfuerzos flector y axil en la sección anterior.



$$N = \iint_{\Omega} \sigma(x) \cdot d\Omega \qquad d\Omega = 1 \cdot dx \quad \text{(espesor unidad)}$$

$$M = \iint_{\Omega} \sigma(x) \cdot x \cdot d\Omega \qquad h = m \cos\frac{\alpha}{2}$$

También se puede hacer equilibrio en la cuña (en O):

$$\boxed{\begin{aligned} N &= -p \cdot h \cdot tg\frac{\alpha}{2} = -5'36 \cdot h \quad (kN) \\ M &= \frac{-ph^2}{2}\left(1 - tg^2\frac{\alpha}{2}\right) = -9'282 \cdot h^2 \quad (kN \cdot m) \\ Q &= p \cdot h = 20 \cdot h \quad (kN) \end{aligned}}$$

NOTA: Deformación plana en polares.

Enunciado: Polar 14

Sobre la arista del diedro que forman dos planos que limitan un terreno, que se considerará como sólido elástico, actúan las cargas indicadas en la figura a. Se pide:

1) Calcular las tensiones en un punto cualquiera.
2) A continuación se practica en el terreno la galería indicada en la figura b, ¿qué tensiones será necesario aplicar desde su interior para que el estado tensional sea el mismo que antes de hacerla?

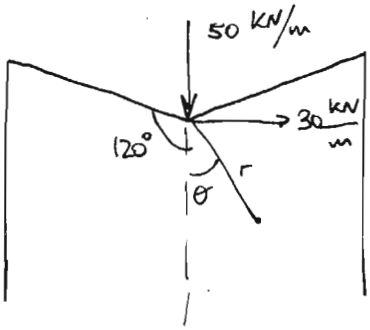


figura a

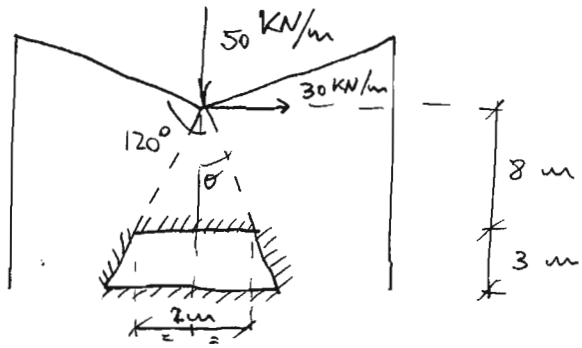


figura b

Resolución:

1) Utilizando las fórmulas para cargas concentradas en cuñas:

$$\underline{T}^P = \frac{-2P}{2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} \frac{\cos\theta}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T}^Q = \frac{-2Q}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(suponemos espesor unidad)

$P = 50$ KN/m

$Q = 30$ KN/m

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Sustituyendo y sumando:

$$\underline{T} = \frac{-100 \cos\theta}{\left(\frac{4\pi}{3} - 0'866\right) r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{-60 \cdot \operatorname{sen}\theta}{\left(\frac{4\pi}{3} + 0'866\right) \cdot r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T} = -30'095 \frac{\cos\theta}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 11'87 \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

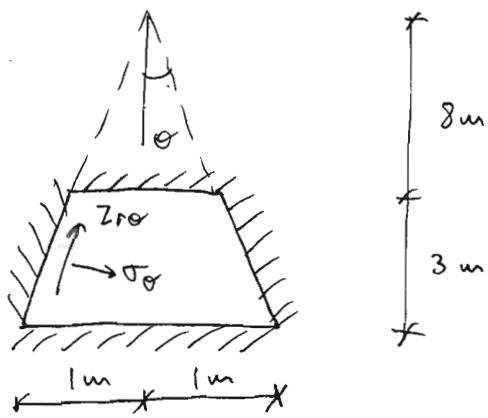
Por tanto:

$$\boxed{\sigma_r = -30'095\,\frac{\cos\theta}{r} - 11'87\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = \frac{-1}{r}\left(30'095\cos\theta + 11'87\operatorname{sen}\theta\right)}$$

$$\boxed{\sigma_\theta = -\frac{1}{r}\cdot 11'87\ \operatorname{sen}\theta}$$

$$\boxed{\tau_{r\theta} = 0}$$

2) Al hacer la galería el estado tensional cambia. Si se le aplican a las paredes de la galería las mismas tensiones que tenía antes de hacerla, nos encontraremos con el mismo estado tensional.



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{8}$$

$$\theta = 0'124$$

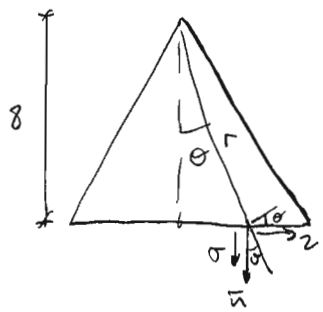
• Paredes laterales:

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{r}\cdot 11'87\cdot 0'124 = \frac{-1'472}{r}$$

• Pared horizontal superior:

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n}$$

$$\left|\begin{array}{l}\sigma = \bar{n}^T\cdot\underline{T}\cdot\bar{n}\\ \tau = \bar{t} - \bar{\sigma}\end{array}\right.$$



EC. PARED: $\frac{8}{r} = \cos\theta$

$$r = \frac{8}{\cos\theta}$$

En nuestro caso: $\bar{n} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n} = \begin{pmatrix}\sigma_r & 0\\ 0 & \sigma_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$$

$$\sigma_r = \frac{-\cos\theta}{8}\left(30'095\cos\theta + 11'87\,\text{sen}\,\theta\right) = -3'762\cos^2\theta - 1'484\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{-\cos\theta}{8}\,11'87\cdot\text{sen}\,\theta = -1'484\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

Sustituyendo:

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} -3'762\cos^3\theta - 1'484\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta \\ 1'484\,\text{sen}^2\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\text{sen}\,\theta\end{pmatrix}\bar{t} = -3'762\cos^4\theta - 1'484\,\text{sen}\,\theta\cos^3\theta - 1'484\,\text{sen}^3\theta\cos\theta$$

$$\tau = \begin{pmatrix}\text{sen}\,\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\bar{t} = -3'762\,\text{sen}\,\theta\cos^3\theta - 1'484\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + 1'484\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$\tau = -3'762\,\text{sen}\,\theta\cos^3\theta$$

NOTA: Problema en planos.

Polar 15.

Un disco de radio R y espesor h, pequeño en comparación con R, gira alrededor de su centro con una velocidad angular Ω. El material del disco posee las siguientes características: módulo de elasticidad E, coeficiente de Poisson ν, masa específica μ (en unidades MPa y m). En estas condiciones geométricas y de carga, se pide:

1. Plantear las ecuaciones de equilibrio en tensiones.
2. Deducir las relaciones deformaciones - movimientos.
3. Obtener las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.
4. Plantear el problema elástico con una formulación local en movimientos, expresando adecuadamente las condiciones de contorno.
5. Calcular el alargamiento del radio.

(Examen de mayo de 1993 y de junio de 1993)

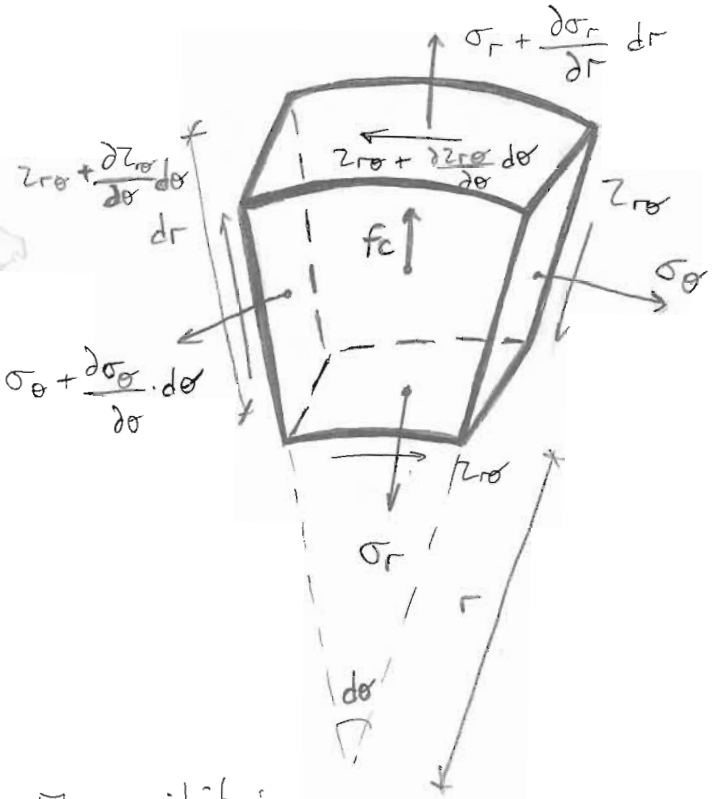
Enunciado: EXAMEN DE MAYO Y JUNIO DE 1993 Polar 15

Un disco de radio R y espesor h, pequeño en comparación con R, gira alrededor de su centro con una velocidad angular Ω. El material del disco posee las siguientes características: módulo de elasticidad E, coeficiente de Poisson ν, masa específica μ (en unidades MPa y m). En estas condiciones geométricas y de carga se pide.

1) Plantear las ecuaciones de equilibrio en tensiones.
2) Deducir las relaciones deformaciones - movimientos.
3) Obtener las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.
4) Plantear el problema elástico con una formulación local en movimientos, expresando adecuadamente las condiciones de contorno.
5) Calcular el alargamiento del radio.

Resolución:

1) Ecuaciones de equilibrio en tensiones.



$$F_c = dm \cdot a_c = dm \frac{v^2}{r} = dm\, \Omega^2 r$$

$$dm = dr \cdot r \cdot d\theta \cdot h \cdot \mu$$

$$F_c = dr\, d\theta\, h \mu \Omega^2 r^2$$

$$f_c = \frac{F_c}{r\, d\theta \cdot h} = dr\, \mu \cdot \Omega^2 \cdot r$$

El equilibrio es:

$$(r): \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r+dr)\, d\theta \cdot h - \sigma_r \cdot r \cdot d\theta \cdot h - 2\sigma_\theta \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr \cdot h - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \cdot d\theta \cdot \operatorname{sen}\frac{d\theta}{2} dr$$

$$+ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \cos\frac{d\theta}{2}\, dr \cdot h + dr\, d\theta\, h \mu \Omega^2 r^2 = 0$$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2}$ y $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1$

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r+dr)\,d\theta - \sigma_r \cdot r \cdot d\theta - \sigma_\theta\, d\theta\, dr - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \frac{d\theta}{2} dr +$$
$$+ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \cdot d\theta \cdot dr + dr\, d\theta\, \mu \Omega^2 r^2 = 0$$

$$\sigma_r \cdot \cancel{r}\, d\theta + \sigma_r\, dr\, d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \cdot r \cdot d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{dr} dr\, dr\, d\theta - \cancel{\sigma_r \cdot r}\, d\theta - \sigma_\theta\, d\theta\, dr -$$
$$- \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \frac{d\theta}{2} dr + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\, dr + dr\, d\theta\, \mu \Omega^2 r^2 = 0$$

Eliminando $d\theta$ y los infinitésimos de 2º orden, queda:

$$\sigma_r dr + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \cdot r - \sigma_\theta dr + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} dr + dr\, \mu \Omega^2 r^2 = 0$$

$$\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cdot r - \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \mu \Omega^2 r^2 = 0$$

Dividiendo por r:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \mu \Omega^2 r = 0}$$ EC. EQ. TENSIONES

θ $$\left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\right)(r+dr)\,\cancel{d\theta}\,\cancel{h} - \tau_{r\theta} \cdot r \cdot \cancel{d\theta}\,\cancel{h} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \cancel{d\theta}\, dr\, \cancel{h} \cos\frac{d\theta}{2} +$$
$$+ \tau_{r\theta} \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{\cancel{2}}\right) dr \cdot \cancel{h}\, \cancel{2} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \cancel{d\theta} \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr \cdot \cancel{h} = 0$$

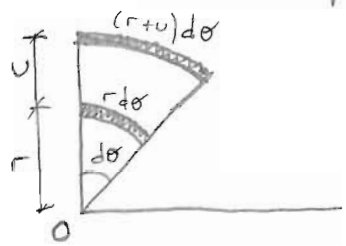
$$\cancel{\tau_{r\theta} r} + \tau_{r\theta} dr + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\, r + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\, dr - \cancel{\tau_{r\theta} \cdot r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} dr + \tau_{r\theta} dr +$$
$$+ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{2} dr = 0$$

Despreciando los infinitésimos de segundo orden:

$$2 \cdot \tau_{r\theta} \cdot dr + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \cdot r + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} dr = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0}$$ EC. EQ. TENSIONES

2) Relaciones deformaciones - movimientos.



$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{du}{dr}}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{ds}{s} = \frac{(r+u)\,d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u}{r} \qquad \boxed{\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}}$$

$$\boxed{\gamma_{r\theta} = 0}$$

3) Compatibilidad de deformaciones.

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{\frac{\partial u}{\partial r}\cdot r - u}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{r}\varepsilon_r - \frac{\varepsilon_\theta}{r}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right)}$$

4) Hay que expresar las tensiones con movimientos y sustituir en la ecuación de equilibrio

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_\theta\right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r\right) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_r \rightarrow \sigma_r = \frac{(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta)E}{(1-\nu^2)} \\ &\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_\theta \rightarrow \sigma_\theta = \frac{(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)E}{(1-\nu^2)} \\ &\tau_{r\theta} = G\cdot\gamma_{r\theta} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \nu\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right] = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)\right]$$

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{1}{r}\left[\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r} - \nu\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right] = \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{r}\left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right]$$

Sustituyendo y operando, queda

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)\right] + \mu\Omega^2 r = 0$$

Integrando y operando:

$$\boxed{u = -\frac{(1-\nu^2)}{8E}\mu\Omega^2 r^3 + \frac{c_1}{2}r + \frac{c_2}{r}}$$

c_1, c_2: ctes integración

Ahora hay que aplicar las condiciones de contorno.

- $u(0)=0 \rightarrow C_2=0$ (para evitar indeterminaciones)
- $\sigma_r \big|_{r=R} = 0 \rightarrow u = K \cdot r^3 + \frac{C_1}{2} r$ siendo $K = -\frac{(1-\nu^2)}{8E} \mu \Omega^2$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = 3Kr^2 + \frac{C_1}{2}$$

$$\varepsilon_\theta = Kr^2 + \frac{C_1}{2}$$

$$\sigma_r = \frac{3Kr^2 + \frac{C_1}{2} + \nu K r^2 + \nu \frac{C_1}{2}}{1-\nu^2} E \rightarrow C_1 = -\frac{\nu K R^2 + 3KR^2}{1+\nu} \cdot 2$$

5) Alargamiento del radio:

$$\Delta L_{RADIO} = u \big|_{r=R}$$

$$u(r=R) = -\frac{(1-\nu^2)}{8E} \mu \Omega^2 R^3 + \frac{R}{2} \left[-\frac{\nu K R^2 + 3KR^2}{1+\nu} \cdot 2 \right]$$

$$\boxed{\Delta L_{RADIO} = \frac{(1-\nu)}{4E} \mu \Omega^2 R^3}$$

NOTA: Problema teórico en coordenadas polares.

Polar 16.

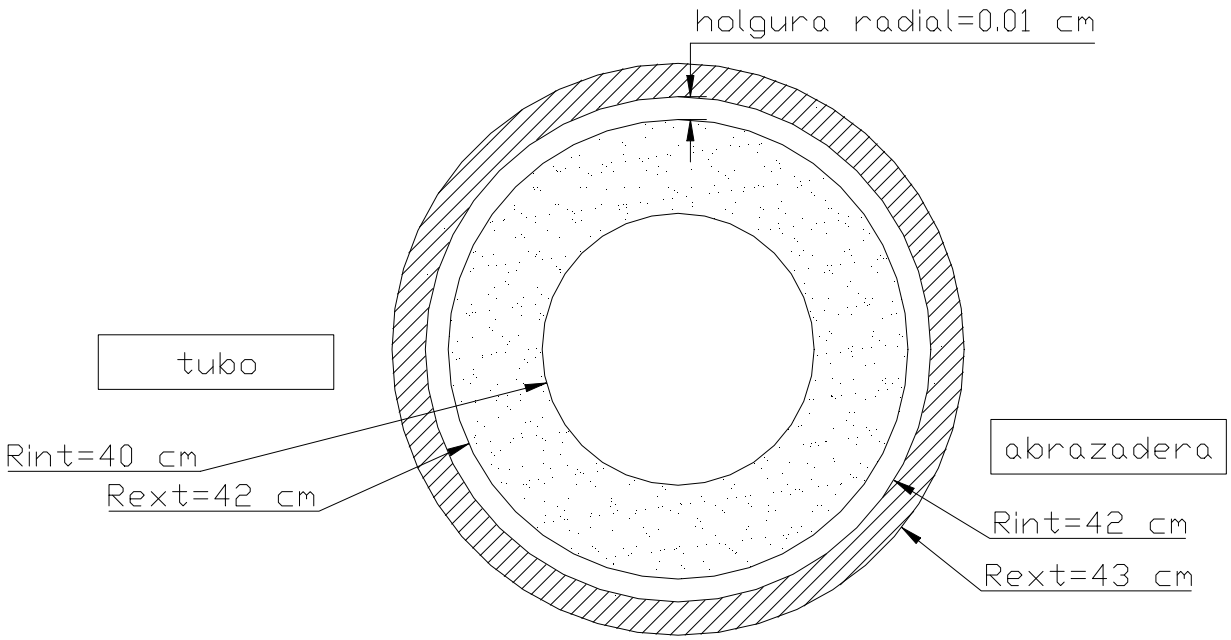
La figura muestra un tubo rodeado por una abrazadera. Los radios de estos cuerpos deberían haber sido los dados en la figura; sin embargo, por un error de ejecución, tras el montaje se observa que entre ellos existe la pequeña holgura reflejada en la figura. En la hipótesis de tensión plana, se desea saber:

1. Presión interna que hay que aplicar en el tubo para cerrar la holgura.

2. Tensiones radiales y tangenciales en ambos cuerpos en la fibra de contacto, cuando sobre el tubo actúe una presión interna doble de la encontrada en el apartado anterior.

Características del material: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa ; $\nu = 0.20$

(Examen de septiembre de 1992)

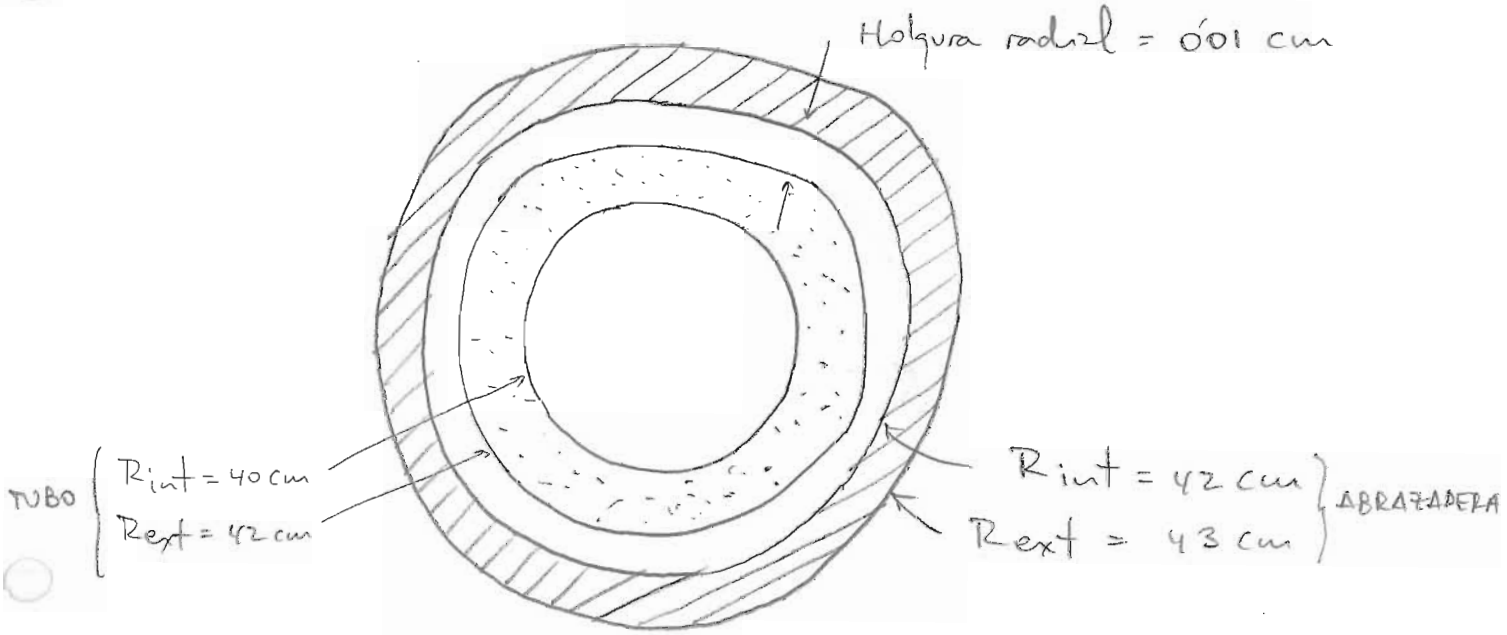


Enunciado: EXAMEN SEPTIEMBRE 1992 Polar 16 (45')

La figura muestra un tubo rodeado por una abrazadera. Los radios de estos cuerpos deberían haber sido los dados en la figura, sin embargo, por un error de ejecución, tras el montaje se observa que entre ellos existe la pequeña holgura reflejada en la figura. En la hipótesis de tensión plana, se desea saber.

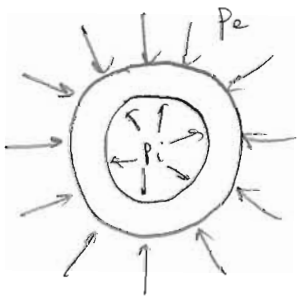
1) Presión interna que hay que aplicar en el tubo para cerrar la holgura.
2) Tensiones radiales y tangenciales en ambos cuerpos en la fibra de contacto, cuando sobre el tubo actúe una presión interna doble de la encontrada en el apartado anterior

Características del material: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa ; $\nu = 0'20$.



Resolución:

1) Es un problema de tubería sometida a presión uniforme.



$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Con las siguientes constantes: $p_e = 0$; $p_i = p$; $R_e = 0'42\ m$, $R_i = 0'4\ m$

$$A = \frac{(p_e - p_i)\, R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = -1'721 \cdot p$$

$$C = \frac{p_e \cdot R_e^2 - p_i \cdot R_i^2}{2(R_i^2 - R_e^2)} = 4'878 \cdot p$$

Por lo tanto:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_r = \dfrac{-1'721 \cdot p}{r^2} + 9'756\, p \\ \sigma_\theta = \dfrac{1'721 \cdot p}{r^2} + 9'756\, p \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array} \right.$$

En simetría radial: $u = \varepsilon_\theta \cdot r = \dfrac{r}{E}\left[\sigma_\theta - \nu \sigma_r\right]$

$$u = \frac{r}{E}\left[\frac{1'721 \cdot p}{r^2} + 9'756\, p + \frac{0'3442\, p}{r^2} - 1'9512\, p\right] = \frac{r \cdot p}{2 \cdot 10^8}\left[\frac{2'0652}{r^2} + 7'8048\right]$$

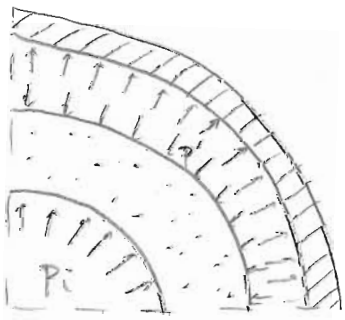
Entonces:

$$u\Big|_{r=0'42} = 10^{-4}\ m = \frac{0'42 \cdot p}{2 \cdot 10^8}\left[\frac{2'0652}{0'42^2} + 7'8048\right] = 4'0976 \cdot 10^{-8}\, p$$

$$\boxed{p = 2440'465\ KN/m^2}$$

2) Ahora $p_i = 2 \cdot p = 4880'93\ KN/m^2$

El tubo empuja la abrazadera hacia afuera y ésta empuja el tubo hacia adentro.



TUBO:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C \qquad \sigma_\theta = \frac{-A}{r^2} + 2C \qquad \tau_{r\theta} = 0$$

con $A = \dfrac{(p_e - p_i) R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$

$C = \dfrac{p_e R_e^2 - p_i R_i^2}{2(R_i^2 - R_e^2)}$

$R_e = 0'42$ m $\qquad R_i = 0'4$ m

$p_i = 4880'93 \qquad p_e = p'$

Sustituyendo:

$$A = 1'721\,(p' - 4880'93) = 1'721 \cdot p' - 8400$$

$$C = \frac{0'1764 \cdot p' - 780'9488}{-0'0328} = -5'378 \cdot p' + 23809'415$$

Por lo tanto:

$$\sigma_r = \frac{1'721 \cdot p' - 8400}{r^2} - 10'756 \cdot p' + 47618'83$$

$$\sigma_\theta = \frac{-1'721 \cdot p' + 8400}{r^2} - 10'756 \cdot p' + 47618'83$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

ABRAZADERA:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C \qquad \sigma_\theta = \frac{-A}{r^2} + 2C \qquad \tau_{r\theta} = 0$$

con $R_e = 0'43$ m $\qquad R_i = 0'42$ m

$p_i = p' \qquad p_e = 0$

$A = -3'8372 \cdot p' \qquad C = 10'3765 \cdot p'$

Sustituyendo:

$$\sigma_r = \frac{-3'8372 \cdot p'}{r^2} + 20'753\, p'$$

$$\sigma_\theta = \frac{3'8372 \cdot p'}{r^2} + 20'753\, p'$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Vamos a igualar los movimientos en los puntos de contacto.

• Abrazadera:

$$U = \frac{r}{E}\left(\sigma_\theta - \nu \cdot \sigma_r\right) = \frac{r}{2\cdot 10^8}\left[\frac{3'8372\cdot p'}{r^2} + 20'753 p' + \frac{0'76744\, p'}{r^2} - 4'1506 p'\right]$$

$$U = \frac{r\cdot p'}{2\cdot 10^8}\left[\frac{4'605}{r^2} + 16'602\right] \rightarrow U\Big|_{r=0'42} = 8'97\cdot 10^{-8} p'$$

• Tubo:

$$U = \frac{r}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right)$$

$$U = \frac{r}{2\cdot 10^8}\left[\frac{-1'721\, p' + 8400}{r^2} - 10'756\, p' + 47618'83 + \frac{1680 - 0'3442\, p'}{r^2} + 2'1512\, p' - 9523'766\right]$$

$$= \frac{r}{2\cdot 10^8}\left[\frac{-2'0652\, p' + 10080}{r^2} - 8'6048\, p' + 38095'064\right]$$

$$U\Big|_{r=0'42} = \frac{0'42}{2\cdot 10^8}\left[-20'3123\, p' + 95237'92\right] = -4'2656\cdot 10^{-8} p' + 2\cdot 10^{-4}$$

Y la ecuación de compatibilidad es:

$$U\Big|^{\text{ABRAZADERA}}_{r=0'42} = U\Big|^{\text{TUBO}}_{r=0'42} - \underbrace{10^{-4}}_{\text{Holgura}}$$

Por lo tanto:

$$8'97\cdot 10^{-8} p' = -4'2656\cdot 10^{-8}\cdot p' + 2\cdot 10^{-4} - 10^{-4} \rightarrow p' = 755'62\ \frac{KN}{m^2}$$

Y sustituyendo en las expresiones de las tensiones en $r = 0'42$ m:

TUBO

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= -755'62\ \frac{KN}{m^2} \\ \sigma_\theta &= 79738'42\ \frac{KN}{m^2} \\ \tau_{r\theta} &= 0\ \frac{KN}{m^2} \end{aligned}}$$

ABRAZADERA

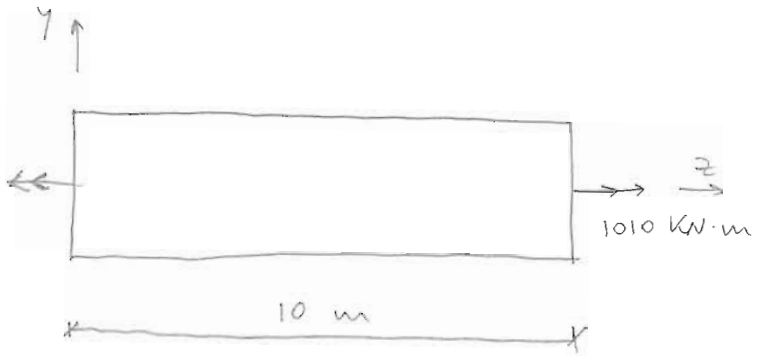
$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= -755'62\ \frac{KN}{m^2} \\ \sigma_\theta &= 32118'26\ \frac{KN}{m^2} \\ \tau_{r\theta} &= 0\ \frac{KN}{m^2} \end{aligned}}$$

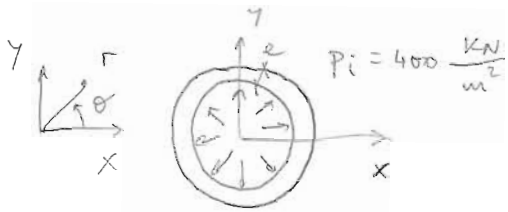
NOTA: Presión uniforme en tubería

Enunciado: Polar 17

Un tubo de sección circular de 10 metros de longitud, 1'80 m de diámetro interior y 18 cm de espesor está sometido simultáneamente a un momento torsor en sus caras extremas de 1010 KN·m y a una presión interna de 400 KN/m². Si se admite que las presiones tangenciales debidas al momento torsor son uniformes en la pared del tubo y que la presión interna origina un estado de tensión plana, se pide determinar los valores de la máxima tensión tangencial y de la tensión principal mayor en la cara exterior, en el interior y en el punto medio de la pared.

Resolución:





$R_i = 0'90$ m

$R_e = 1'08$ m

$e = 0'18$ m

Vamos a dividir entre las tensiones provocadas por la presión interna y por el momento torsor.

• Presión interna:

$$A = \frac{(p_e - p_i)\, R_e^2 \cdot R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = \frac{-400 \cdot 1'08^2 \cdot 0'9^2}{1'08^2 - 0'9^2} = -1060'36 \text{ KN}$$

$$C = \frac{p_e \cdot R_e^2 - p_i \cdot R_i^2}{2(R_i^2 - R_e^2)} = \frac{-400 \cdot 0'9^2}{2(0'9^2 - 1'08^2)} = 454'55 \frac{KN}{m^2}$$

Y las tensiones resultan:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C = \frac{-1060'36}{r^2} + 909'09$$

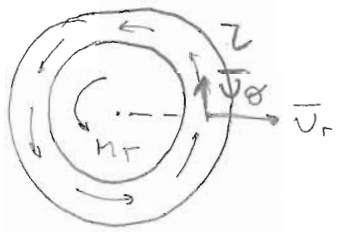
$$\sigma_\theta = \frac{-A}{r^2} + 2C = \frac{1060'36}{r^2} + 909'09$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \ KN/m^2$$

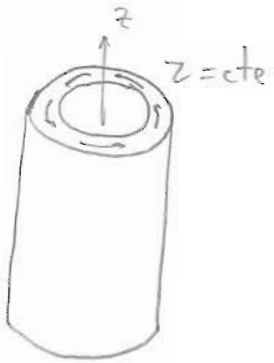
Y por ser tensión plana: $\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$

• <u>Momento torsor:</u>

Las presiones tangenciales debidas al momento torsor son uniformes en la pared del tubo.



$\tau = cte$



En la pared del tubo: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aplicando Cauchy: $\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$

$$\tau = \bar{U}_\theta \cdot \bar{t} = (0,1,0) \begin{bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \tau_{\theta z} = \tau = cte$$

$R_{medio} = 0'99 \ m$

$$M_T = \iint_\Omega \tau \cdot r \cdot d\Omega = \tau \cdot \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} r \cdot dr \cdot r \cdot d\theta =$$

$$= \tau_{\theta z} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_{0'9}^{1'08} d\theta = \tau_{\theta z} \cdot \int_0^{2\pi} 0'1769 \, d\theta = 1'1115 \cdot \tau_{\theta z} = 1010 \ KN \cdot m$$

$$\tau_{\theta z} = 908'665 \ KN/m^2$$

Y el tensor de tensiones total es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{-1060'36}{r^2} + 909'09 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1060'36}{r^2} + 909'09 & 908'665 \\ 0 & 908'665 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{en } KN/m^2)$$

Particularizando para los puntos pedidos, se tiene:

- Cara interior: $r = 0'9$ m

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 0 & 2218'18 & 908'665 \\ 0 & 908'665 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 2542'88 \ KN/m^2 \\ \sigma_2 = -324'69 \ KN/m^2 \\ \sigma_3 = -400 \ KN/m^2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\sigma_{MAX} = 2542'88 \ KN/m^2} \qquad \boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left[\sigma_1 - \sigma_3\right] = 1471'44 \ \frac{KN}{m^2}}$$

- Punto medio: $r = 0'99$ m

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} -172'8 & 0 & 0 \\ 0 & 1990'98 & 908'665 \\ 0 & 908'665 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 2343'33 \ KN/m^2 \\ \sigma_2 = -172'8 \ KN/m^2 \\ \sigma_3 = -352'35 \ KN/m^2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\sigma_{MAX} = 2343'33 \ KN/m^2} \qquad \boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left[\sigma_1 - \sigma_3\right] = 1347'84 \ KN/m^2}$$

- Cara exterior: $r = 1'08$ m

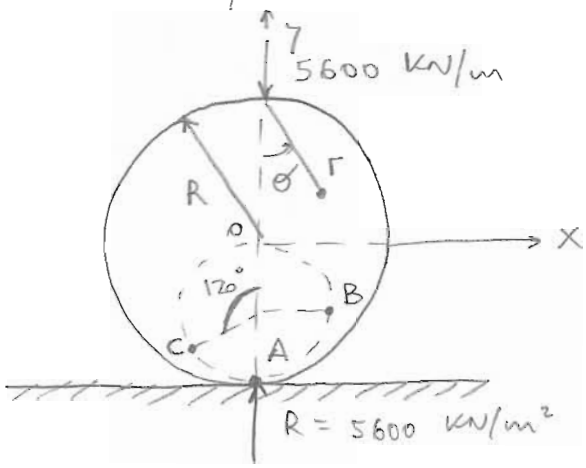
$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1818'18 & 908'665 \\ 0 & 908'665 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 2194'44 \ KN/m^2 \\ \sigma_2 = 0 \ KN/m^2 \\ \sigma_3 = -376'26 \ KN/m^2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\sigma_{MAX} = 2194'44 \ KN/m^2} \qquad \boxed{\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left[\sigma_1 - \sigma_3\right] = 1285'35 \ \frac{KN}{m^2}}$$

NOTA: Presión interior en tubería + torsión

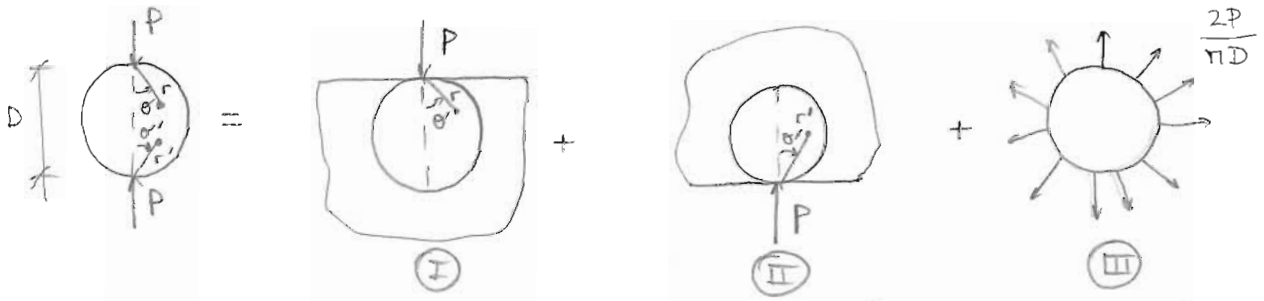
Enunciado: Polar 18

Un cilindro recto de directriz circular con centro en O y radio R = 4 cm está sometido a una línea de cargas P de 5600 KN/m, como se indica en la figura. Se considera una superficie cilíndrica interior de diámetro OA = R. Se pide calcular la tensión normal a dicha superficie en los puntos O, A, B y C situados como se indica en la figura

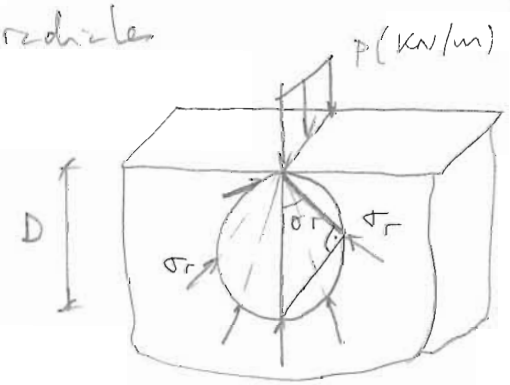


Resolución:

Un rodillo cilíndrico solicitado por dos fuerzas (en KN/m) aplicadas sobre dos generatrices diametralmente opuestas se resuelve como suma de tres estados:



La explicación de esto es la siguiente. En el estado de tensiones en suelo bajo carga repartida, sólo hay tensiones radiales



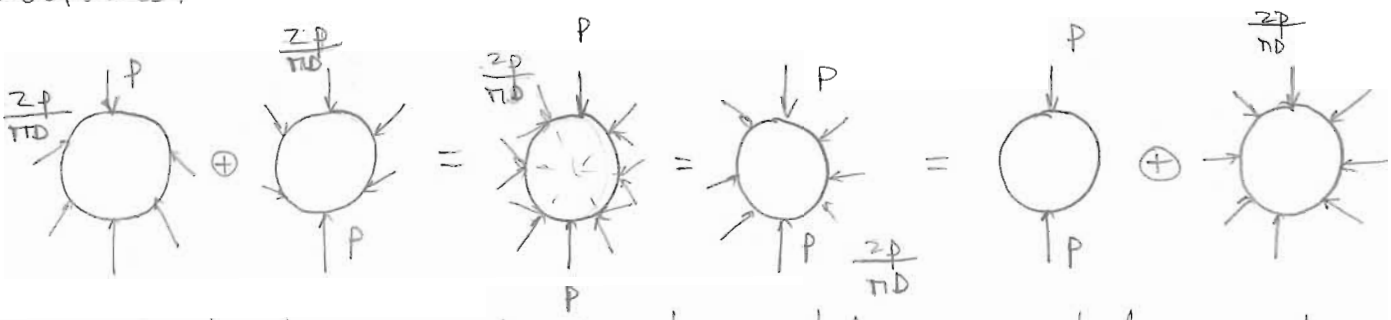
$$\underline{T} = \frac{-2p}{\pi} \frac{\cos\theta}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación de la circunferencia es: $r = D \cdot \cos\theta$

Por lo tanto, en el contorno de la circunferencia pintada:

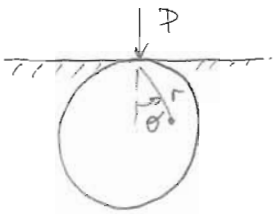
$$\underline{T} = \frac{-2p}{\pi}\,\frac{\cos\theta}{r}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{-2p}{\pi D}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{-p}{\pi R}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Entonces:



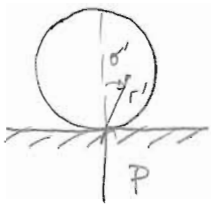
Por lo tanto, la suma de los tres estados comentados es la aplicación de dos cargas sobre generatrices extremas en el rodillo. Hay que tener cuidado con los sistemas de referencia de cada uno de los estados.

• Estado (I):



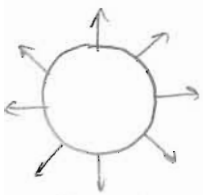
$$\underline{T} = \frac{-2p}{\pi}\,\frac{\cos\theta}{r}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{-11200\cos\theta}{\pi r}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad (\text{en } KN/m^2)$$

• Estado (II):



$$\underline{T} = \frac{-2p}{\pi}\,\frac{\cos\theta'}{r'}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{-11200\cdot\cos\theta'}{\pi r'}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad (\text{en } KN/m^2)$$

• Estado (III):



$\frac{2p}{\pi D}$

$R_e = R$ $\quad p_e = \frac{-2p}{\pi D} = \frac{-p}{\pi R}$

$R_i = 0$ $\quad p_i = 0$

$$A = \frac{(p_e - p_i)\,R_e^2 \cdot R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = 0$$

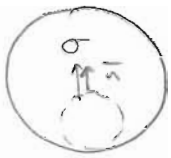
$$C = \frac{p_e R_e^2 - p_i R_i^2}{2(R_i^2 - R_e^2)} = \frac{-pR^2}{-\pi R\cdot 2\cdot R^2} = \frac{2p}{\pi D}$$

$$\underline{T} = \frac{2p}{\pi D}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}44563'4 & 0\\ 0 & 44563'4\end{bmatrix}\left(\frac{KN}{m^2}\right)$$

Particularizando para los puntos pedidos.

- **Punto A:** Como es un apoyo puntual, la tensión es ∞.

- **Punto O:**



Estado (I): $r = 0'04$ m

$\theta = 0°$

$\bar{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \frac{-11200}{\pi \cdot 0'04} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89126'77 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (KN/m^2)$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = [-1, 0] \begin{bmatrix} 89126'77 \\ 0 \end{bmatrix} = -89126'77 \ \frac{KN}{m^2} \quad \text{(compresión)}$$

Estado (II): $r' = 0'04$ m

$\theta' = 0°$

$\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \frac{-11200}{\pi \cdot 0'04} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -89126'77 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (KN/m^2)$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = [1, 0] \begin{bmatrix} -89126'77 \\ 0 \end{bmatrix} = -89126'77 \ KN/m^2$$

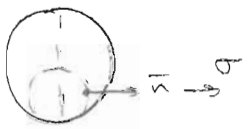
Estado (III): $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 44563'4 & 0 \\ 0 & 44563'4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44563'4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (KN/m^2)$$

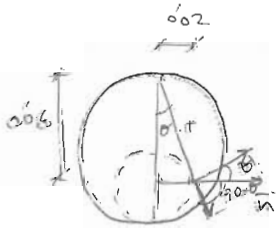
$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = [1, 0] \begin{bmatrix} 44563'4 \\ 0 \end{bmatrix} = 44563'4 \ KN/m^2$$

Y el estado total: $\boxed{\sigma = -89126'77 - 89126'77 + 44563'4 = -133690'14 \ \frac{KN}{m^2}}$

- **Punto B:**



- Estado (I): $r = \sqrt{0'06^2 + 0'02^2} = 0'06325$ m



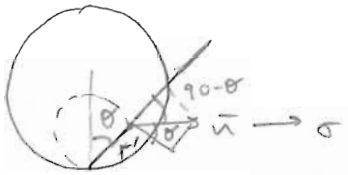
$\theta = \operatorname{arctg} \frac{0'02}{0'06} = 18'435° \rightarrow \cos\theta = 0'9487$

$\bar{n} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'3162 \\ 0'9487 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \frac{-11200 \cdot 0'9487}{\pi \cdot 0'06325} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'3162 \\ 0'9487 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16908'24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = [0'3162, 0'9487] \begin{bmatrix} -16908'24 \\ 0 \end{bmatrix} = -5346'39 \ KN/m^2$$

• Estado (II) : $r' = \sqrt{0'02^2 + 0'02^2} = 0'02828$ m



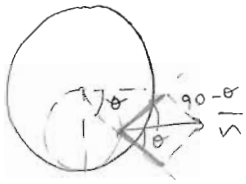
$\theta' = 45^\circ$

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = -89126'77 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63022'14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \left[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right] \begin{bmatrix} -63022'14 \\ 0 \end{bmatrix} = -44563'4 \ \frac{kN}{m^2}$$

• Estado (III) : $\bar{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$



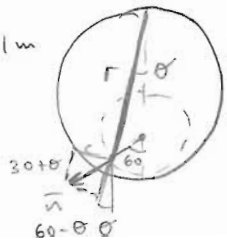
$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 31511'08 \\ 31511'08 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \begin{bmatrix} 31511'08 \\ 31511'08 \end{bmatrix} = 44563'4 \ kN/m^2$$

Y el estado total: $\boxed{\sigma = -5346'39 - 44563'4 + 44563'4 = -5346'39 \ \frac{kN}{m^2}}$

• Punto C :

• Estado (I) : $r = \sqrt{(0'06 + 0'02\cos 60)^2 + (0'02 \operatorname{sen} 60)^2} = 0'072111$ m



$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{0'02 \cdot \operatorname{sen} 60}{0'07} = 13'898^\circ$$

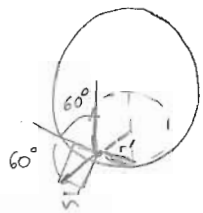
$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 0'6934 \\ 0'7206 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = -47991'33 \cdot \begin{bmatrix} 0'6934 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33277'19 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \left[0'6934, 0'7206\right] \begin{bmatrix} -33277'19 \\ 0 \end{bmatrix} = -23074'40 \ \frac{kN}{m^2}$$

• Estado (II) : $r' = \sqrt{(0'02 \cdot \operatorname{sen} 60)^2 + 0'01^2} = 0'02$ m

$\theta' = 60^\circ$

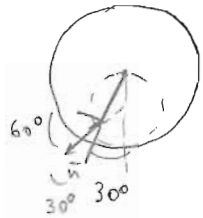


$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 0'5 \\ 0'866 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = -89126'77 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'5 \\ 0'866 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44563'4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \left[0'5, 0'866\right] \begin{bmatrix} -44563'4 \\ 0 \end{bmatrix} = -22281'7 \ kN/m^2$$

• Estado III : $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0'866 \\ 0'5 \end{bmatrix}$



$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 44563'4 & 0 \\ 0 & 44563'4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'866 \\ 0'5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38591'9 \\ 22281'7 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot \bar{t} = \begin{bmatrix} 0'866, 0'5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38591'9 \\ 22281'7 \end{bmatrix} = 44563'4 \ KN/m^2$$

Y el estado total $\boxed{\sigma} = -23074'4 - 22281'7 + 44563'4 = \boxed{-792'7 \ KN/m^2}$

NOTA: Rodillo cargado en punto opuesto

CAPÍTULO 7- MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

7.1- ENERGÍA POTENCIAL TOTAL (EPT)

Un sólido deformable sometido a un sistema de cargas cualquiera estará, en equilibrio, en la posición en la que la energía potencial total sea mínima.

EPT=EE-EP
V=U-W

EPT: Energía Potencial Total (V)
EE: Energía Elástica (U)
EP: Energía potencial o trabajo de las fuerzas exteriores (W)

7.2- ENERGÍA ELÁSTICA

La expresión general de la Energía Elástica es:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot dV = \frac{1}{2}\iiint_V \left\langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \cdot dV$$

En Elasticidad bidimensional (tensión o deformación plana):

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \left\langle \sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \cdot dV = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left\langle \sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \cdot e \cdot d\Omega$$

7.3- ENERGÍA POTENCIAL

La expresión de la energía potencial es:

$$W = F \cdot r_{eficaz} = \iiint_V f_i \cdot u_i \cdot dV + \iint_\Omega p_i \cdot u_i \cdot d\Omega$$

Siendo: f_i : fuerzas másicas

p_i : presiones

7.4- MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Es un método numérico para minimizar la Energía Potencial Total. En general se tienen expresadas las tensiones, deformaciones o movimientos mediante funciones aproximantes Φ_i, que dependen de unas constantes c_i. Estas funciones deben cumplir las condiciones de contorno del problema.

Por lo tanto, las constantes c_i son las incógnitas del problema, y hay que derivar la función de la Energía Potencial Total respecto de ellas para obtener el sistema de ecuaciones que permita hallar la solución.

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial c_2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{\partial V}{\partial c_n} = 0$$

El método de Rayleigh-Ritz da una solución aproximada del problema.

Ritz 1.

El macizo triangular representado es indefinido según la dirección z -deformación plana- y se encuentra sometido a la carga repartida p (kN/m²), y apoyado como se muestra en la figura.

El material de que está constituido tiene un módulo de elasticidad de $E = 10^6$ kN/m² y el coeficiente de Poisson es nulo. No considerando ningún tipo de carga másica, y sabiendo que L = 60 m y p = 30 kN/m², se pide:

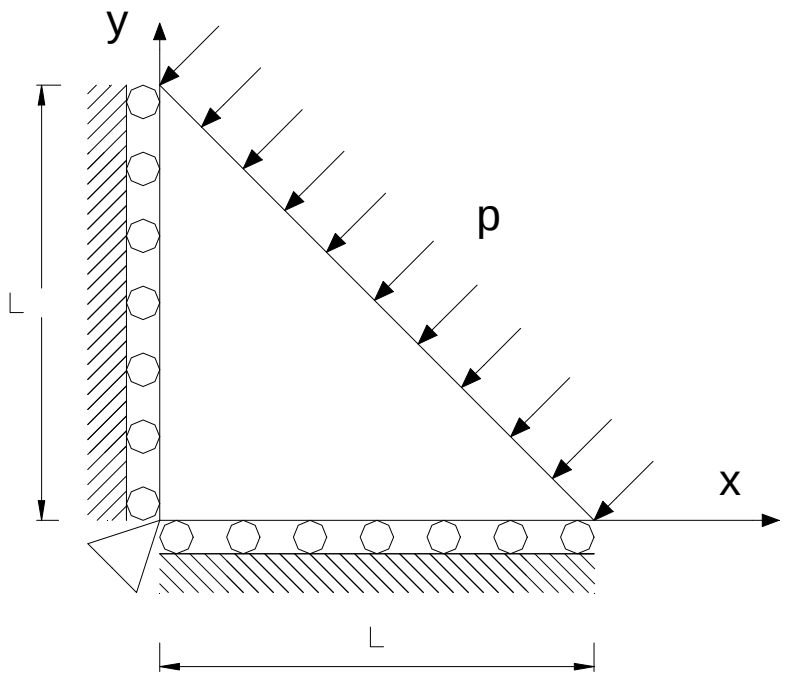
1. Expresar la energía potencial total V del sólido elástico anterior, en función de las componentes de los desplazamientos horizontal -u- y vertical -v-.

2. Obtener los desplazamientos u y v mediante la aplicación del método de Ritz, suponiendo para éstos las siguientes expresiones aproximadas:

   $$u = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$$

   $$v = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{11}xy + b_{20}x^2 + b_{02}y^2$$

3. Obtener el estado tensional en el punto de coordenadas x = L/2, y = L/2.



Enunciado: (Práctica 11, curso 2000-2001)

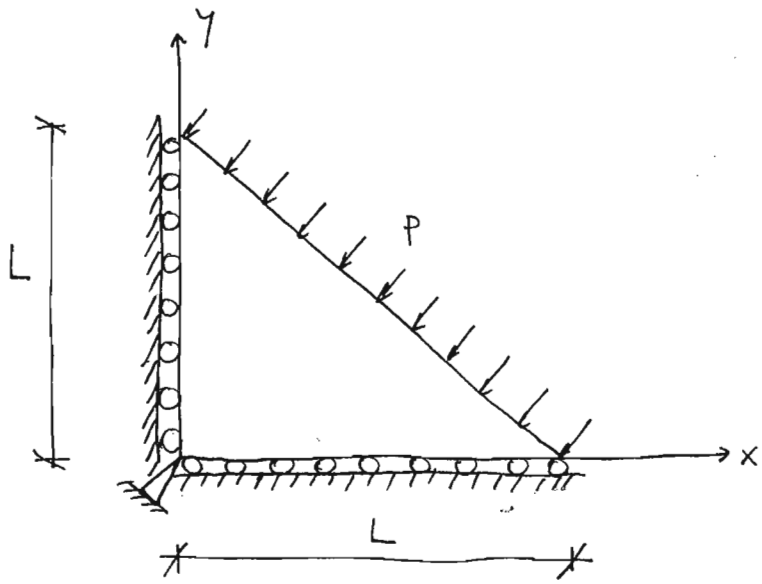
El macizo triangular representado es indefinido según la dirección z - deformación plana - y se encuentra sometido a la carga repartida p (KN/m^2) y apoyado como se muestra en la figura.
El material de que está constituido tiene un módulo de elasticidad de $E = 10^6\ KN/m^2$ y el coeficiente de Poisson es nulo.
No considerando ningún tipo de carga másica, y sabiendo que $L = 60\ m$ y $p = 30\ KN/m^2$, se pide:

1) Expresar la energía potencial total V del sólido elástico anterior, en función de las componentes de los desplazamientos horizontal -u- y vertical -v-.

2) Obtener los desplazamientos u y v mediante la aplicación del método de Ritz, suponiendo para éstos las siguientes expresiones aproximadas:

$$u = a_{00} + a_{10} \cdot x + a_{01} \cdot y + a_{11} xy + a_{20} x^2 + a_{02} y^2$$
$$v = b_{00} + b_{10} \cdot x + b_{01} \cdot y + b_{11} xy + b_{20} x^2 + b_{02} y^2$$

3) Obtener el estado tensional en el punto de coordenadas $x = \frac{L}{2}$, $y = \frac{L}{2}$.



Resolución:

1) Energía potencial total.

Al ser deformación plana: $\left| \begin{array}{ll} \varepsilon_z = 0 & \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xz} = 0 & \Rightarrow \tau_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 & \Rightarrow \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$

$$V = U - W$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz} \rangle \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dV$$

Al ser deformación plana:

$$U = \frac{1}{2} \iint_\Omega \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \rangle \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} e \ d\Omega$$

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \sigma_x = \lambda \cdot e + 2G \cdot \varepsilon_x = E \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y = \lambda \cdot e + 2G \varepsilon_y = E \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \dfrac{E}{2} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{E}{2} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0 \qquad G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 5 \cdot 10^5 \ \dfrac{KN}{m^2} \\ e = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$U = \frac{1}{2} \iint_\Omega \left[E \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + E \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega \cdot e$$

El trabajo de las fuerzas exteriores (W) sólo se debe a p.

$$W = \int_V f_i \cdot u_i \, dV = \int_0^L \frac{-P}{\sqrt{2}} u \, dx \, e - \int_0^L \frac{P}{\sqrt{2}} v \, dy \, e$$

Por tanto:

$$\boxed{V = U - W = \frac{eE}{2} \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega + \frac{eP}{\sqrt{2}} \left[\int_0^L u \, dx + \int_0^L v \, dy \right]}$$

2) Desplazamientos:

$$\begin{cases} U = a_{00} + a_{10}x + a_{01}\cdot y + a_{11}\cdot x\cdot y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 \\ V = b_{00} + b_{10}x + b_{01}\cdot y + b_{11}\cdot x\cdot y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 \end{cases}$$

Lo primero es comprobar las condiciones de contorno.

$$\begin{cases} U(0,0) = 0 \longrightarrow a_{00} = 0 \\ V(0,0) = 0 \longrightarrow b_{00} = 0 \\ U(x=0) = 0 \longrightarrow 0 = a_{01}\cdot y + a_{02}\cdot y^2 \longrightarrow \boxed{a_{01} = a_{02} = 0} \\ V(y=0) = 0 \longrightarrow 0 = b_{10}\cdot x + b_{20}\cdot x^2 \longrightarrow \boxed{b_{10} = b_{20} = 0} \\ \omega_{xy}(x=0) = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(b_{11}\cdot y - a_{11}\cdot x) = \frac{b_{11}}{2}y = 0 \rightarrow \boxed{b_{11} = 0} \\ \omega_{xy}(y=0) = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(b_{11}\cdot y - a_{11}\cdot x) = \frac{-a_{11}}{2}x = 0 \rightarrow \boxed{a_{11} = 0} \end{cases}$$

Además, por simetría:

<u>En $x=y$</u> : $U = V \longrightarrow a_{10}\cdot x + a_{20}\cdot x^2 = b_{01}\cdot y + b_{02}y^2$

$$a_{10} = b_{01}$$
$$a_{20} = b_{02}$$

<u>En $x+y=L$</u> $\longrightarrow \bar{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n}$

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sigma_x + \tau_{xy} \\ \tau_{xy} + \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{-p}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x + \tau_{xy} &= -p \\ \tau_{xy} + \sigma_y &= -p \end{aligned}\right\} \quad \sigma_x = \sigma_y \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$a_{10} + 2a_{20}x = a_{10} + 2a_{20}\cdot y$$

$$a_{10} + 2a_{20}\cdot x = a_{10} + 2a_{20}\cdot L - 2a_{20}\cdot x$$

$$(a_{10} - a_{10} - 2a_{20}L) + x(2a_{20} + 2a_{20}) = 0 \longrightarrow \boxed{a_{20} = 0}$$

$$\boxed{b_{02} = 0}$$

Por lo tanto queda: $\left| \begin{array}{l} U = a_{10}\, x \\ V = a_{10} \cdot y \end{array} \right.$

$$U = \frac{eE}{2} \iint_{\Omega} \left[a_{10}^2 + a_{10}^2 \right] d\Omega = e \cdot E \cdot a_{10}^2 \iint_{\Omega} d\Omega = \frac{1}{2}\, e \cdot E \cdot a_{10}^2 \cdot L^2$$

$$W = \int_0^L \frac{-p}{\sqrt{2}}\, U \cdot dx \cdot e + \int_0^L \frac{-p}{\sqrt{2}}\, V \cdot dy \cdot e = \frac{-p \cdot e}{\sqrt{2}} \left[\int_0^L U dx + \int_0^L V dy \right] =$$

$$= \frac{-p \cdot e}{\sqrt{2}} \left[\int_0^L a_{10} \cdot x \cdot dx + \int_0^L a_{10} \cdot y \cdot dy \right] = \frac{-p \cdot e \cdot a_{10}}{\sqrt{2}}\, L^2$$

Por tanto:

$$V = U - W = \frac{1}{2}\, e \cdot E \cdot a_{10}^2 \cdot L^2 + \frac{e \cdot p \cdot a_{10}}{\sqrt{2}}\, L^2$$

Minimizando la energía potencial total:

$$\frac{dV}{da_{10}} = \cancel{e} \cdot E \cdot a_{10} \cdot \cancel{L^2} + \frac{\cancel{e} \cdot p}{\sqrt{2}}\, \cancel{L^2} = 0 \longrightarrow a_{10} = \frac{-p}{E\sqrt{2}}$$

Con los valores numéricos dados, se tiene:

$$a_{10} = \frac{-30}{10^6 \cdot \sqrt{2}} = -2'12132 \cdot 10^{-5}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\begin{array}{l} U = -2'12132 \cdot 10^{-5} \cdot x \\ V = -2'12132 \cdot 10^{-5} \cdot y \end{array}}$$

3) Estado tensional del punto $\left(x = \frac{L}{2}, y = \frac{L}{2}\right) = (30, 30)$

$$\sigma_x = E \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-30}{\sqrt{2}} \quad KN/m^2$$

$$\sigma_y = E \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-30}{\sqrt{2}} \quad KN/m^2$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right] = 0 \quad KN/m^2$$

NOTA: Método de Ritz

Ritz 2.

En el sólido prismático de la figura, cuya planta es un cuadrado de lado a = 10 m y su altura es h = 8 m, todas sus caras, a excepción de la superior que está libre, tienen sus movimientos impedidos en la dirección normal al plano de la cara y los contenidos en el plano de la cara son libres. Sobre este sólido actúa sólo su peso propio. El material elástico del sólido es de peso específico $\gamma = 2.4 \cdot 10^4$ N/m^3 y sus características elásticas son el módulo de elasticidad longitudinal $E = 2 \cdot 10^4$ MPa y su coeficiente de Poisson es $\nu = 0.20$. Se pide:

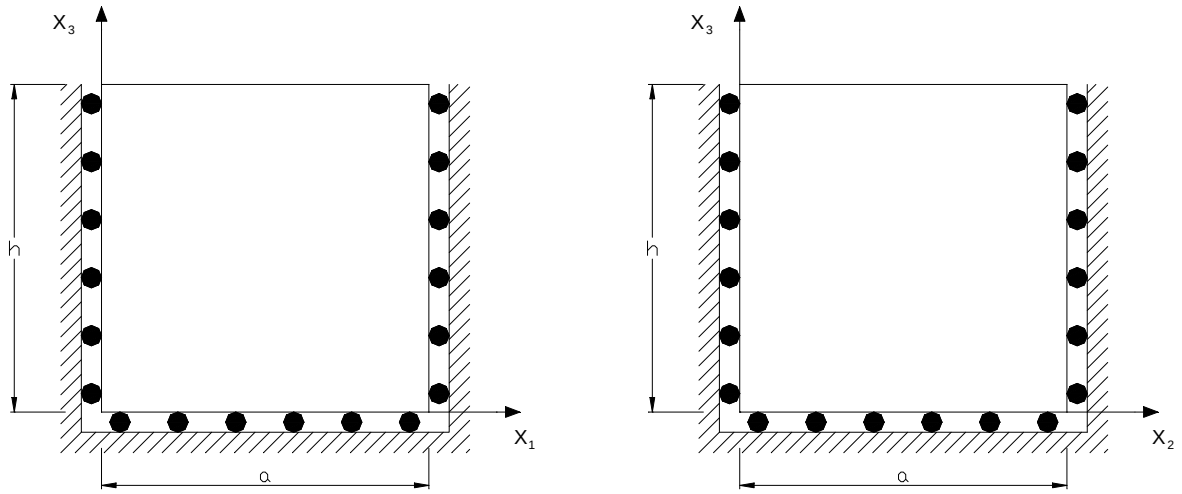
1. Expresar el campo de desplazamientos u_1, u_2, u_3 admisibles con las condiciones anteriores y suponiendo que varían linealmente con las coordenadas.

2. Aplicando el método de Rayleigh-Ritz calcular los coeficientes no determinados en el apartado anterior.

3. Comprobar si la solución obtenida es la solución del problema elástico.

4. Deducir de los resultados de los apartados anteriores el nuevo campo de movimientos de segundo grado que debería considerarse para obtener una solución más aproximada.

(Examen de mayo de 2001)



Enunciado: EXAMEN MAYO DE 2001 (40') Ritz2

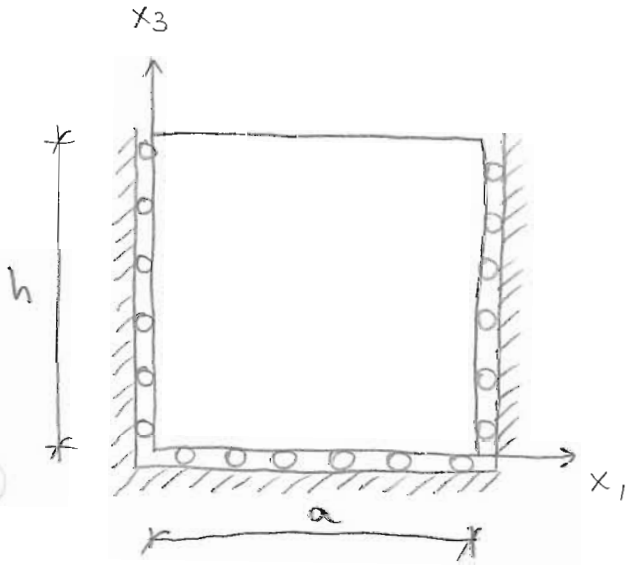
En el sólido prismático de la figura, cuya planta es un cuadrado de lado $a = 10$ m y su altura es $h = 8$ m, todas sus caras, a excepción de la superior que está libre, tienen sus movimientos impedidos en la dirección normal al plano de la cara y los contenidos en el plano de la cara son libres. Sobre este sólido actúa sólo su peso propio. El material elástico del sólido es de peso específico $\gamma = 2'4 \cdot 10^4 \frac{N}{m^3}$ y sus características elásticas son $E = 2 \cdot 10^4$ MPa y $\nu = 0'20$. Se pide:

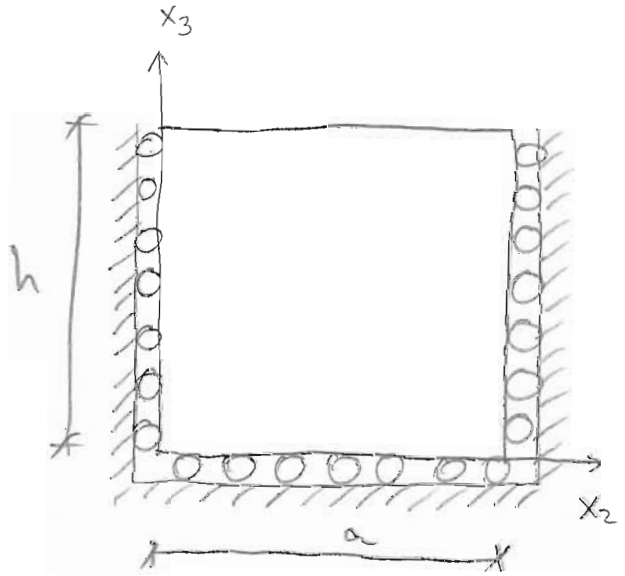
1) Expresar el campo de desplazamientos u_1 u_2 u_3 admisibles con las condiciones anteriores y suponiendo que varían linealmente con las coordenadas.

2) Aplicando el método de Rayleigh-Ritz, calcular los coeficientes no determinados en el apartado anterior.

3) Comprobar si la solución obtenida es la solución del problema elástico.

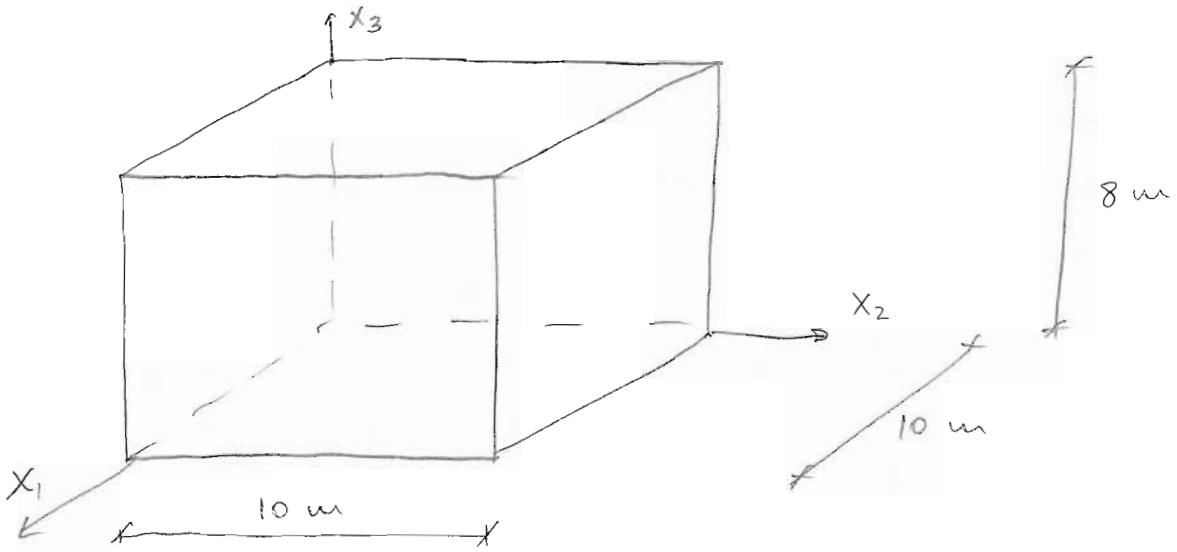
4) Deducir de los resultados de los apartados anteriores el nuevo campo de movimientos de segundo grado que debería considerarse para obtener una solución más aproximada





Resolución:

a)



$$U_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3$$
$$U_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3$$
$$U_3 = a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3$$

Las condiciones de contorno son:

- CARA $x_3 = 0 \rightarrow U_3 = 0$

$a_3 \cdot x_1 + b_3 \cdot x_2 = 0$ $\quad \forall x_1,\ 0 \le x_1 \le 10$, $\forall x_2,\ 0 \le x_2 \le 10$ $\quad \boxed{a_3 = b_3 = 0}$

- CARA $x_2 = 0 \rightarrow U_2 = 0$

$a_2 \cdot x_1 + c_2 x_3 = 0$ $\quad \forall x_1,\ 0 \le x_1 \le 10$, $\forall x_3,\ 0 \le x_3 \le 8$ $\quad \boxed{a_2 = c_2 = 0}$

- CARA $x_1 = 0 \rightarrow U_1 = 0$

$b_1 \cdot x_2 + c_1 x_3 = 0$ $\quad \forall x_2,\ 0 \le x_2 \le 10$, $\forall x_3,\ 0 \le x_3 \le 8$ $\quad \boxed{b_1 = c_1 = 0}$

- CARA $x_2 = 10 \rightarrow U_2 = 0$

$b_2 \cdot 10 = 0 \rightarrow \boxed{b_2 = 0}$

- CARA $x_1 = 10 \rightarrow U_1 = 0$

$a_1 \cdot 10 = 0 \rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

Por lo tanto, los desplazamientos quedan:

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= K \cdot X_3 \end{aligned}}$$

2) Aplicando Rayleigh-Ritz, obtener K.

$$V = U - W$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \langle \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \sigma_{x_3} \tau_{x_1x_2} \tau_{x_1x_3} \tau_{x_2x_3} \rangle \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \varepsilon_{x_2} \\ \varepsilon_{x_3} \\ \gamma_{x_1x_2} \\ \gamma_{x_1x_3} \\ \gamma_{x_2x_3} \end{Bmatrix} dV$$

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \varepsilon_{x_2} = 0 \qquad \varepsilon_{x_3} = K$$

$$\gamma_{x_1x_2} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \gamma_{x_1x_3} = 0 \qquad \gamma_{x_2x_3} = 0$$

Las tensiones se sacan de las ecuaciones de Lamé:

$$e = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2} + \varepsilon_{x_3} = K$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8.333\,333 \ KN/m^2$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 5.555.556 \ KN/m^2$$

$$\sigma_{x_1} = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{x_1} = 5555556 \cdot K = 5'6 \cdot 10^6 K$$

$$\sigma_{x_2} = 5555556 \cdot K = 5'6 \cdot 10^6 K$$

$$\sigma_{x_3} = 5555556 \cdot K + 16666666 \cdot K = 2'2 \cdot 10^7 K$$

$$\tau_{x_1x_2} = 0$$

$$\tau_{x_1x_3} = 0$$

$$\tau_{x_2x_3} = 0$$

Por tanto:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \langle 5'6\cdot 10^6 K,\ 5'6\cdot 10^6 K,\ 2'22\cdot 10^7 K,\ 0,0,0\rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dV =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V 2'22\cdot 10^7 K^2\, dV = \frac{1}{2}\cdot 2'22\cdot 10^7\cdot K^2\cdot 8\cdot 10\cdot 10 = 8'889\cdot 10^9 K^2 \ (KN\cdot m)$$

Y la energía potencial será:

$$W = \iiint_V -\gamma\cdot U_3\cdot dV = \iiint_V -24\cdot K\cdot x_3\, dV = -24K\iiint_V x_3\, dV =$$

$$= -24\cdot K\cdot \int_0^{10}\int_0^{10}\int_0^{8} x_3\, dx_3\, dx_2\, dx_1 = -24K\int_0^{10}\int_0^{10}\left[\frac{x_3^2}{2}\right]_0^8 dx_2\, dx_1 =$$

$$= -24K\int_0^{10}\int_0^{10} 32\, dx_2\, dx_1 = -768\, K\, 100 = -76800\, K \ (KN\cdot m)$$

Y la energía potencial total será:

$$V = U - W = 8'889\cdot 10^9 K^2 + 76800\, K$$

Para que sea mínima:

$$\frac{dV}{dK} = 1'778\cdot 10^{10} K + 76800 = 0 \Rightarrow \boxed{K = -4'32\cdot 10^{-6}}$$

Y el campo de movimientos queda:

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= -4'32\cdot 10^{-6}\cdot x_3 \end{aligned}}$$

3) Para comprobar si la solución obtenida es solución del problema elástico tiene que cumplir:

- ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO EN TENSIONES.
- ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES.
- CONDICIONES DE CONTORNO. ✓ (ya comprobadas).

$\sigma_{x_1} = -24 \ kN/m^2$ | $\tau_{x_1x_2} = \tau_{x_1x_3} = \tau_{x_2x_3} = 0$

$\sigma_{x_2} = -24 \ kN/m^2$

$\sigma_{x_3} = -96 \ kN/m^2$

$\varepsilon_{x_1} = 0$ | $\gamma_{x_1x_2} = \gamma_{x_1x_3} = \gamma_{x_2x_3} = 0$

$\varepsilon_{x_2} = 0$

$\varepsilon_{x_3} = -4'32 \cdot 10^{-6}$

Por tanto, las ecuaciones de equilibrio interno quedan:

$0 = 0$ ✓

$0 = 0$ ✓

$0 - 24 \neq 0$ No se cumple

Y las de compatibilidad de movimientos.

$0 = 0$ ✓ (en todos los casos)

4) La solución de segundo grado será:

$$U_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 x_1 x_2 + e_1 x_1 x_3 + f_1 x_2 x_3 + g_1 x_1^2 + h_1 x_2^2 + i_1 x_3^2$$

$$U_2 = a_2 x_1 + \dots$$

$$U_3 = a_3 x_1 + \dots$$

Aplicando las condiciones de contorno del apartado 1, queda:

$$U_1 = -10 g_1 x_1 + g_1 x_1^2$$

$$U_2 = -10 h_2 x_2 + h_2 x_2^2$$

$$U_3 = c_3 x_3 + e_3 x_1 x_3 + f_3 x_2 x_3 + i_3 x_3^2$$

Se deben añadir las condiciones de simetría:

$$U_1(x_1) = -U_1(10 - x_1) \rightarrow g_1 = 0$$

$$U_2(x_2) = -U_2(10 - x_2) \rightarrow h_2 = 0$$

Por tanto, los movimientos quedarían:

$$\boxed{\begin{aligned} &U_1 = 0 \\ &U_2 = 0 \\ &U_3 = K_1 x_3 + K_2 x_1 x_3 + K_3 x_2 x_3 + K_4 \cdot x_3^2 \end{aligned}}$$

Operando queda:

$$V = U - W = 2'222 \cdot 10^9 K_1^2 + 1'452 \cdot 10^{11} K_2^2 + 1'452 \cdot 10^{11} K_3^2 + 1'896 \cdot 10^{11} K_4^2 +$$
$$+ 2'222\, 10^{10} K_1 K_2 + 2'222 \cdot 10^{10} K_1 K_3 + 3'556 \cdot 10^{10} K_1 K_4 + 1'111 \cdot 10^{11} K_2 K_3 +$$
$$+ 1'778 \cdot 10^{11} K_2 K_4 + 1'778 \cdot 10^{11} K_3 K_4 + 76800\, K_1 + 384000\, K_2 +$$
$$+ 384000\, K_3 + 409600\, K_4$$

Derivando para minimizar:

$$\frac{\partial V}{\partial K_1} = 0 \rightarrow K_1 + 5K_2 + 5K_3 + 8K_4 = -1'728 \cdot 10^{-5} \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial V}{\partial K_2} = 0 \rightarrow K_1 + 13'069 \cdot K_2 + 5K_3 + 8K_4 = -1'728 \cdot 10^{-5} \quad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\partial V}{\partial K_3} = 0 \rightarrow K_1 + 5K_2 + 13'069 \cdot K_3 + 8K_4 = -1'728 \cdot 10^{-5} \quad (\mathrm{III})$$

$$\frac{\partial V}{\partial K_4} = 0 \rightarrow K_1 + 5K_2 + 5K_3 + 10'667 \cdot K_4 = -1'152 \cdot 10^{-5} \quad (\mathrm{IV})$$

Resolviendo: $K_1 = -3'46 \cdot 10^{-5}$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$, $K_4 = 2'16 \cdot 10^{-6}$

Y los movimientos quedan:

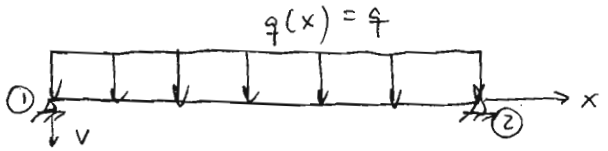
$$\boxed{\begin{aligned} &U_1 = 0 \\ &U_2 = 0 \\ &U_3 = -3'46 \cdot 10^{-5} \cdot x_3 + 2'16 \cdot 10^{-6} \cdot x_3^2 \end{aligned}}$$

NOTA: Problema de Rayleigh - Ritz

Enunciado (extraído de Brevelas): Ritz 3

Calcular la flecha en el centro de una viga biapoyada de longitud L sometida a carga uniforme, con la siguiente función de interpolación, por el método de Rayleigh-Ritz:

$$v = a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



Resolución:

Lo primero es ver las condiciones de contorno:

PTO 1 : $v(0) = 0$

PTO 2 : $v(L) = 0$

Luego el campo de movimientos que nos dan cumple las condiciones de contorno del problema.

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{a\pi}{L} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\Pi = U - W \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{-a\pi^2}{L^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \sigma \cdot \varepsilon \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_f^2}{EI}\, dx$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L E \cdot I \cdot \left(\frac{-a\pi^2}{L^2}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{4} a^2 EI \frac{\pi^4}{L^3}$$

$$W = \int_0^L q(x)\, v(x)\, dx = \int_0^L q \cdot a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 2aq\frac{L}{\pi}$$

$$EPT = \Pi = U - W = \frac{1}{4} a^2 EI \frac{\pi^4}{L^3} - 2aq\frac{L}{\pi}$$

$$\frac{dEPT(a)}{da} = \frac{1}{2}\frac{\pi^4}{L^3} EI \cdot a - 2q\frac{L}{\pi} = 0$$

$$\boxed{a = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI}}$$

Ritz 4.

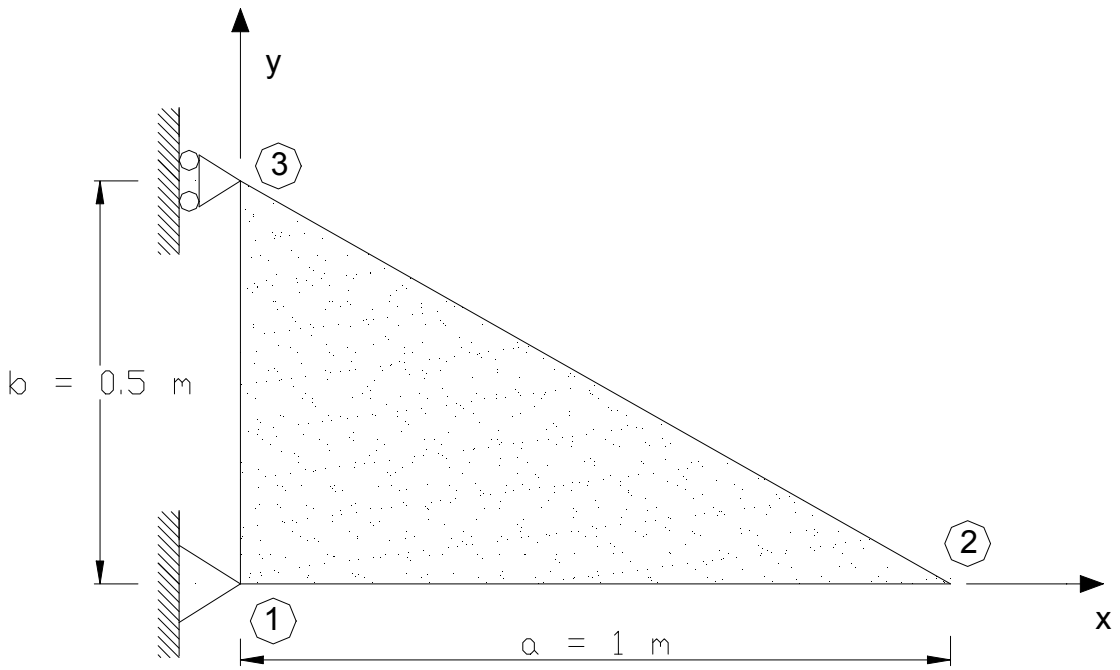
La placa triangular de la figura es delgada, de espesor e = 1 cm y se encuentra sometida únicamente a su peso propio. Las características del material son $E = 2 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0.30$ y el peso específico $\gamma = 25$ kN/m^3.

Se desea obtener una solución aproximada del campo de desplazamientos u y v utilizando el método de Rayleigh-Ritz con las siguientes funciones lineales de interpolación:

$$u(x,y) = u_2\, x/a \qquad\qquad v(x,y) = v_2\, x/a + v_3\, y/b$$

Esto es, determinar los desplazamientos nodales que hacen óptima dicha aproximación.

(Examen de julio de 1990)



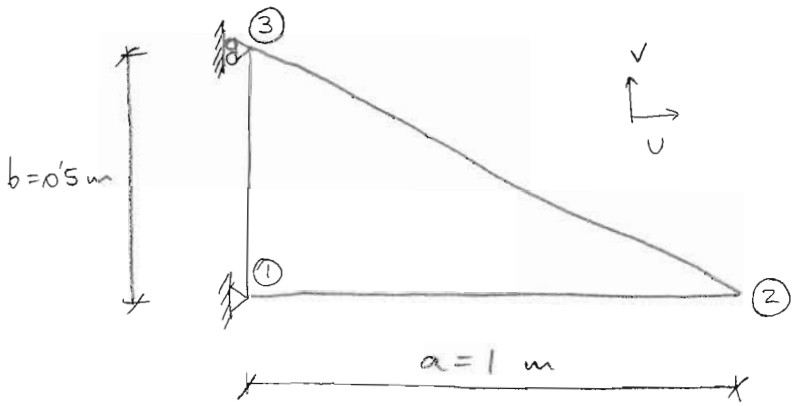
Enunciado: EXAMEN JULIO 1990 Ritz 4 (30')

La placa triangular de la figura es delgada, de espesor $e = 1$ cm, y se encuentra sometida únicamente a su peso propio. Las características del material son $E = 2 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0'30$ y el peso específico $\gamma = 25$ KN/m^3.

Se desea obtener una solución aproximada del campo de desplazamientos u y v utilizando el método de Rayleigh-Ritz con las siguientes funciones lineales de interpolación:

$$u(x,y) = u_2 \frac{x}{a} \qquad v(x,y) = v_2 \frac{x}{a} + v_3 \frac{y}{b}$$

Esto es, determinar los desplazamientos nodales que hacen óptima dicha aproximación.



Resolución:

Lo primero es ver si las funciones aproximadas que nos dan cumplen las condiciones de contorno.

PUNTO 1 : $u(0,0) = 0$ ✓ $v(0,0) = 0$ ✓

PUNTO 2 : $u(a,0) = u_2$ ✓ $v(a,0) = v_2$ ✓

PUNTO 3 : $u(0,b) = 0$ ✓ $v(0,b) = v_3$ ✓

Por tanto, el campo de movimientos que nos dan cumple las condiciones de contorno del problema.

Al estar en tensión plana:

$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

El campo de deformaciones es:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2}{a} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_3}{b} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_2}{a}$$

Por lo tanto, la energía elástica es:

$$U = \frac{1}{2} \iint_\Omega \left\langle \frac{u_2}{a} \quad \frac{v_3}{b} \quad \frac{v_2}{a} \right\rangle \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2/a \\ v_3/b \\ v_2/a \end{Bmatrix} e \, d\Omega =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iint_\Omega \left\langle \frac{u_2}{a} \quad \frac{v_3}{b} \quad \frac{v_2}{a} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{u_2}{a} + \frac{\nu \cdot v_3}{b} \\ \frac{\nu u_2}{a} + \frac{v_3}{b} \\ \frac{(1-\nu)\, v_2}{2a} \end{bmatrix} e \, d\Omega =$$

$$= \frac{E \cdot e}{2(1-\nu^2)} \iint_\Omega \left[\frac{u_2^2}{a^2} + \frac{\nu u_2 v_3}{ab} + \frac{\nu u_2 v_3}{ab} + \frac{v_3^2}{b^2} + \frac{(1-\nu) v_2^2}{2a^2} \right] d\Omega =$$

$$= \frac{E \cdot e}{2(1-\nu^2)} \iint_\Omega \underbrace{\left[\frac{u_2^2}{a^2} + \frac{2\nu u_2 v_3}{ab} + \frac{v_3^2}{b^2} + \frac{(1-\nu) v_2^2}{2a^2} \right] d\Omega}_{cte}$$

$$U = \frac{E \cdot e}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \left[\frac{u_2^2}{a^2} + \frac{2\nu u_2 v_3}{ab} + \frac{v_3^2}{b^2} + \frac{(1-\nu) v_2^2}{2a^2} \right]$$

Y el trabajo de las fuerzas exteriores:

$$W = \iiint_V -\gamma \cdot v(x,y) \, dV = \iint_\Omega -\gamma \cdot \left[v_2 \frac{x}{a} + v_3 \frac{y}{b} \right] \cdot e \cdot d\Omega =$$

$$= \frac{-\gamma \cdot e \, v_2}{a} \underbrace{\iint_\Omega x \, d\Omega}_{M_{est} \text{ resp. eje } y = \frac{1}{2} ab \frac{a}{3}} - \frac{\gamma \cdot e \cdot v_3}{b} \underbrace{\iint_\Omega y \, d\Omega}_{M_{est} \text{ respecto eje } x = \frac{1}{2} ab \frac{b}{3}} =$$

$$= \frac{-\gamma \cdot e \cdot v_2}{a} \cdot \frac{1}{2} \frac{a^2 b}{3} - \frac{\gamma \cdot e \cdot v_3}{b} \frac{1}{2} \frac{a b^2}{3}$$

$$W = \frac{-\gamma \cdot e \cdot a \cdot b}{6} \left[v_2 + v_3 \right]$$

Por lo tanto, la energía potencial total es:

$$V = U - W = \frac{E \cdot e \cdot a\, b}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{u_2^2}{a^2} + \frac{2\nu\, u_2 v_3}{ab} + \frac{v_3^2}{b^2} + \frac{(1-\nu)\, v_2^2}{2a^2} \right] + \frac{\gamma e a b}{6} [v_2 + v_3]$$

Derivamos con respecto a las constantes:

$$\frac{\partial V}{\partial u_2} = \frac{E \cdot e \cdot a \cdot b}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{2u_2}{a^2} + \frac{2\nu v_3}{ab} \right] = 0 \rightarrow \frac{2u_2}{a^2} + \frac{2\nu v_3}{ab} = 0$$

$$\frac{u_2}{a} + \frac{\nu v_3}{b} = 0 \rightarrow u_2 = \frac{-\nu v_3 a}{b} = -0'6\, v_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_2} = \frac{E \cdot \cancel{e} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}}{4(1-\nu^2)} \frac{(1-\nu)\cancel{2} v_2}{\cancel{2} a^2} + \frac{\gamma \cdot \cancel{e} \cancel{a} \cancel{b}}{6} = 0$$

$$v_2 = \frac{-\gamma\, 4(1-\nu^2)\, a^2}{6\, E\, (1-\nu)} = -1'0833 \cdot 10^{-6}\ m$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_3} = \frac{E \cdot \cancel{e} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{2\nu u_2}{a\, b} + \frac{2 v_3}{b^2} \right] + \frac{\gamma \cancel{e} \cancel{a} \cancel{b}}{6} = 0$$

$$\frac{E}{4(1-\nu^2)} \frac{2\nu}{ab} (-0'6\, v_3) + \frac{E}{4(1-\nu^2)} \frac{2}{b^2} v_3 = \frac{-\gamma}{6}$$

$$-3956043'96\, v_3 + 43956043'96\, v_3 = \frac{-\gamma}{6}$$

$$v_3 = -1'041667 \cdot 10^{-7}\ m \rightarrow u_2 = 6'25 \cdot 10^{-8}\ m$$

Por lo tanto, la solución del campo de desplazamientos es:

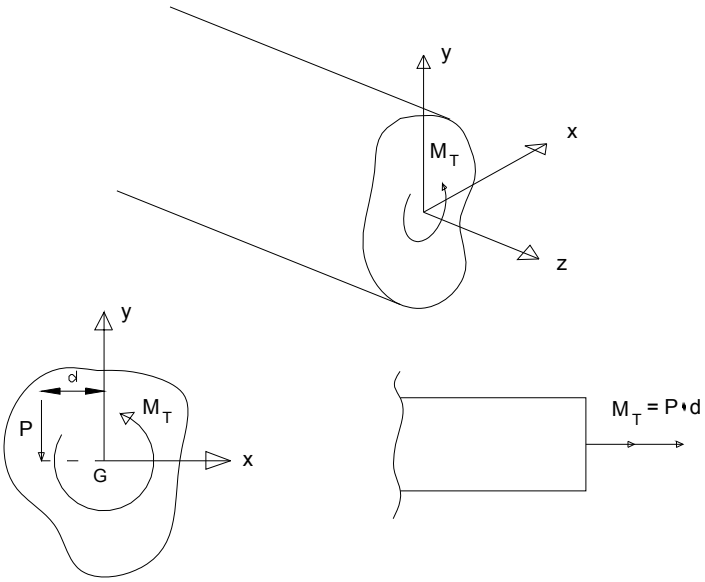
$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y) &= 6'25 \cdot 10^{-8} \cdot x \\ v(x,y) &= -1'0833 \cdot 10^{-6} \cdot x - 2'0833 \cdot 10^{-7} \cdot y \end{aligned}}$$

NOTA: Rayleigh-Ritz con tensión plana.

CAPÍTULO 8- TORSIÓN

8.1- INTRODUCCIÓN

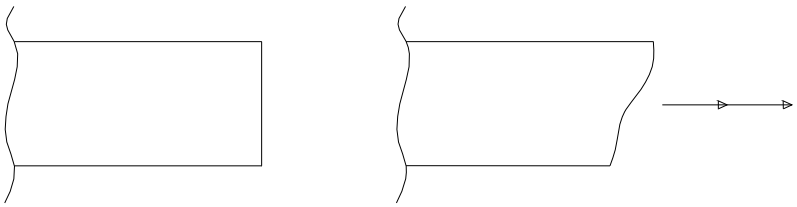
La torsión aparece cuando la línea de acción de las cargas no pasa por la directriz (línea de unión de los centros de gravedad).



Las unidades son de fuerza por distancia.

Alabeo:

Es la deformación que se produce en las secciones transversales de una pieza como consecuencia de la aplicación de un momento torsor, y que hace que las secciones dejen de ser planas.



ALABEO

Giro por torsión:

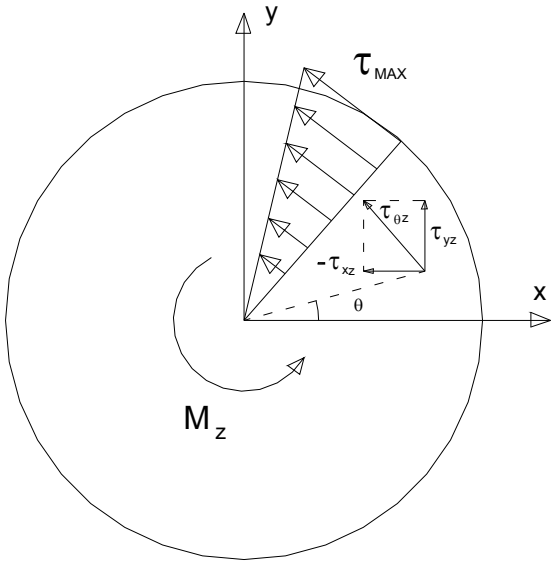
Se aplica el Teorema de Mohr para torsión.

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{G \cdot J} \int M_T(z) \cdot dz \qquad G \cdot J: \text{ Rigidez a torsión}$$

8.2-TORSIÓN EN SECCIÓN CIRCULAR

En las secciones circulares, tanto macizas como anulares, bajo un momento torsor, se produce lo siguiente:

- Las secciones planas y normales a la directriz se mantienen bajo torsión planas y perpendiculares a la directriz. Por lo tanto, no hay alabeo.
- Las tensiones varían linealmente con la distancia al centro y son perpendiculares al radio vector.



$$\tau_{\theta z} = \frac{M_z \cdot r}{J} \qquad \tau_{xz} = \frac{-M_z \cdot y}{J} \qquad \tau_{yz} = \frac{M_z \cdot x}{J}$$

J: Momento de inercia a torsión.

En sección circular:

$$\boxed{J = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^4}$$

Desplazamientos:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -\alpha \cdot y \cdot z \\ v &= \alpha \cdot x \cdot z \\ w &= 0 \end{aligned}}$$

$\alpha = \dfrac{\theta}{z}$ (giro por unidad de longitud)

8.3- TORSIÓN EN SECCIÓN CUALQUIERA. MÉTODO DE LAS TENSIONES O DE PRANDTL

Se utiliza una función de tensiones Φ para resolver el problema, que nada tiene que ver con la función de Airy. La solución en tensiones es:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ &\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ &\tau_{yz} = \frac{-\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned}}$$

TENSIONES

Con estas tensiones se satisfacen automáticamente las ecuaciones de equilibrio, si no existen fuerzas de masa.

Además, debe cumplirse:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 \cdot G \cdot \alpha = cons\tan te}$$

Φ es constante en el contorno lateral Γ. En secciones simplemente conexas (sin agujeros) esta constante se puede escoger arbitrariamente, por lo que se suele tomar $\Phi = 0$. Las condiciones de contorno en las “tapas” son:

$$\boxed{\begin{aligned} &Q_x = Q_y = 0 \\ &M_z = 2 \cdot \iint_{\Omega} \Phi \cdot dx \cdot dy \end{aligned}}$$

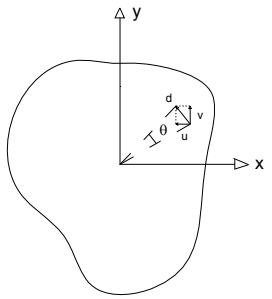
$$\boxed{M_z = G \cdot J \cdot \alpha}$$

8.4- TORSIÓN EN SECCIÓN CUALQUIERA. MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS O DE SAINT VENANT

Los desplazamientos de una sección que ha girado $\theta = \alpha \cdot z$ son:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -\alpha \cdot y \cdot z \\ v &= \alpha \cdot x \cdot z \\ w &= \alpha \cdot \Psi(x, y) \end{aligned}}$$

DESPLAZAMIENTOS



$\Psi(x, y)$ es la función de alabeo. De los desplazamientos se obtienen las deformaciones. De éstas, por Lamé, las tensiones:

$$\boxed{\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ &\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right] \\ &\frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right] \end{aligned}}$$

DEFORMACIONES

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ &\tau_{xz} = G \cdot \alpha \cdot \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right] \\ &\tau_{yz} = G \cdot \alpha \cdot \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right] \end{aligned}}$$

TENSIONES

Las condiciones que deben cumplir estas tensiones para ser solución del problema son:

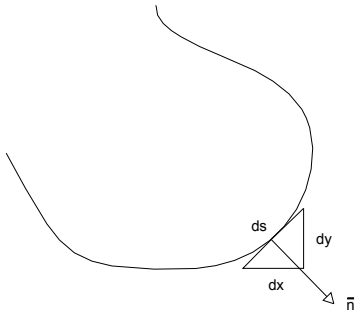
1) Ecuaciones de equilibrio.
2) Condiciones de contorno en la superficie lateral (no hay tensiones).
3) Condiciones de contorno en las caras extremas (“tapas”), que reciben los momentos $\pm M_z$.

Ecuaciones a utilizar:

De la condición 1) se saca:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0}$$

De la condición 2) se saca:



$$\frac{dx}{ds} = sen\beta$$
$$\frac{dy}{ds} = \cos\beta$$

β : ángulo que forma $\bar{n}$ con el eje x

Aplicando Cauchy: $\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dy/ds \\ -dx/ds \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolviendo:

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = y \cdot \frac{dy}{ds} + x \cdot \frac{dx}{ds}}$$

De la condición 3) se saca:

$$\boxed{M_z = G \cdot J \cdot \alpha}$$

$$\boxed{J = \iint_{\Omega} \left[x \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right] \cdot dx \cdot dy}$$

Y las condiciones de contorno de las tapas ($Q_x = Q_y = 0$) se cumplen automáticamente.

8.5- MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ PARA TORSIÓN

Este método sirve para obtener soluciones aproximadas. Se suele aplicar, en torsión, utilizando el método de las tensiones.

Energía Elástica: La energía elástica de deformación por unidad de longitud es:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \iint_{\Omega} \left(\tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} \right) \cdot dx \cdot dy = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \iint_{\Omega} \left(\tau_{xz}{}^{2} + \tau_{yz}{}^{2} \right) \cdot dx \cdot dy$$

Energía Potencial: La energía potencial por unidad de longitud es:

$$W = M_z \cdot \alpha$$

Energía Potencial Total:

$$V = U - W$$

Método de Rayleigh-Ritz:

Se sustituyen en las expresiones anteriores las fórmulas de M_z y de las tensiones. Para la función de tensiones Φ se utiliza una aproximación igual a:

$$\Phi(x, y) = \sum_i a_i \cdot \Phi_i(x, y)$$

Las funciones Φ_i se eligen arbitrariamente, pero tienen que cumplir cada una $\Phi_i = 0$ en el contorno lateral. Las expresiones de las energías elástica y potencial quedan:

$$U = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot d\Omega$$

$$W = \alpha \cdot 2 \cdot \iint_{\Omega} \Phi \cdot d\Omega$$

Y hay que derivar V = U – W con respecto a las constantes a_i para hacerlo mínimo:

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = 0$$

Torsión 1.

Un cilindro recto tiene 5 metros de longitud y sección elíptica, cuyos semiejes miden OA = 30 cm y OB = 60 cm. Está sometido a las acciones de un momento torsor de valor 45π m·kN y de un momento flector de valor 60π m·kN, situado éste último en el plano vertical de simetría de la sección (plano BOC). Sus sentidos se indican en la figura.

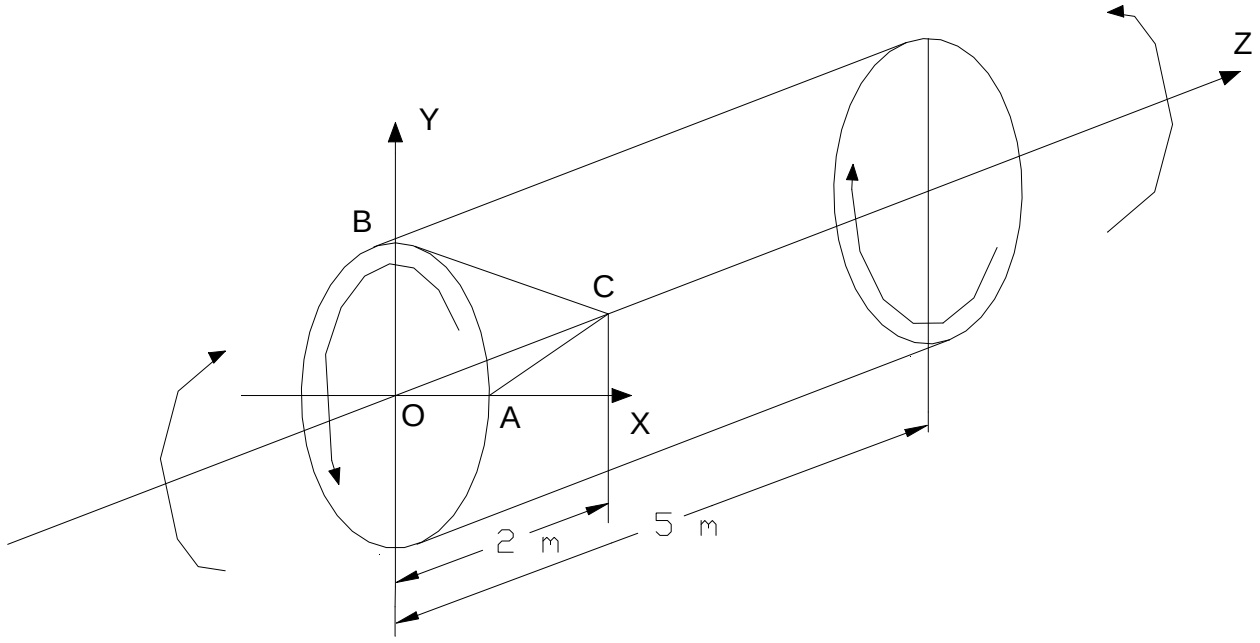
El efecto de la torsión corresponde a una función de tensiones del tipo:

$$\Phi = K\,[\,x^2/(OA)^2 + y^2/(OB)^2 - 1]$$

mientras que para la flexión se adopta la solución según el cálculo en Resistencia de Materiales. Los ejes coordenados se señalan en la figura. Se pide:

1. Expresión de las tensiones tangenciales máximas a lo largo de la recta AC.
2. Expresión de las tensiones tangenciales máximas a lo largo de la recta BC.
3. Valor de la tensión tangencial máxima en el punto A (situado sobre el eje X).
4. Valor de la tensión tangencial máxima en el punto B (situado sobre el eje Y).
5. Valor de la tensión tangencial máxima en el punto C (situado sobre el eje Z).

(Examen de septiembre de 2000)



Enunciado: EXAMEN DE SEPTIEMBRE 2000 Torsión I (40')

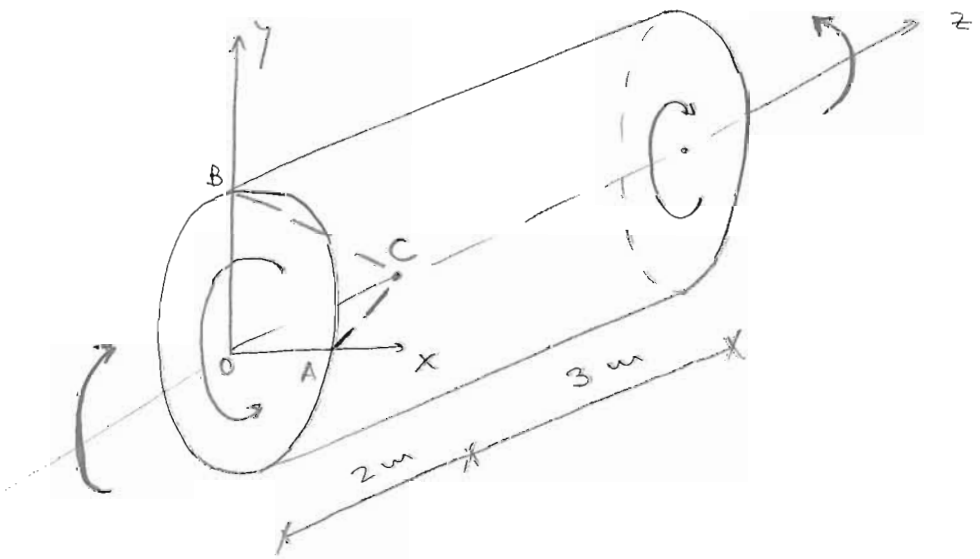
Un cilindro recto tiene 5 metros de longitud y sección elíptica, cuyos semiejes miden OA = 30 cm y OB = 60 cm. Está sometido a las acciones de un momento torsor de valor 45π (kN·m) y de un momento flector de valor 60π (kN·m), situado éste último en el plano vertical de simetría de la sección (plano BOC). Sus sentidos se indican en la figura.

El efecto de la torsión corresponde a una función de tensiones del tipo:

$$\phi = K\left[\frac{x^2}{(OA)^2} + \frac{y^2}{(OB)^2} - 1\right]$$

mientras que para la flexión se adopta la solución según el cálculo en Resistencia de Materiales. Los ejes coordenados se señalan en la figura. Se pide:

1) Expresión de las tensiones tangenciales máximas a lo largo de la recta AC
2) Idem. en BC.
3) Valor de la tensión tangencial máxima en el punto A (situado sobre el eje x).
4) Idem en el punto B (situado sobre el eje y).
5) Idem. en el punto C (situado sobre el eje z).



Resolución:

1) Hay que obtener la expresión genérica del tensor de tensiones.

Torsión:

$a = OA$
$b = OB$

$$\phi = K\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]$$ Función de Prandtl

ϕ tiene que cumplir:
$$\left|\begin{array}{l} \nabla^2\phi = -2G\cdot\alpha = cte \\ \phi|_\Gamma = 0 \end{array}\right.$$

La ecuación del contorno lateral es la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \longrightarrow \phi|_\Gamma = 0 \quad \checkmark$$

Además:

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = K\left[\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}\right] = 27'778\,K = cte \quad \checkmark$$

$$27'778\,K = -2G\cdot\alpha \longrightarrow K = -0'072\,G\alpha$$

Sabemos también:

$$M_z = 2\iint_\Omega \phi\,dx\,dy = 2\iint_\Omega K\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]d\Omega =$$

$$= 2K\left[\frac{1}{a^2}\iint_\Omega x^2\,d\Omega + \frac{1}{b^2}\iint_\Omega y^2\,d\Omega - \iint_\Omega dx\,dy\right]$$

$$\left|\begin{array}{l} \iint_\Omega x^2\,dx\,dy = I_y = \dfrac{a^3 b\pi}{4} \\ \iint_\Omega y^2\,dx\,dy = I_x = \dfrac{ab^3\pi}{4} \\ \iint_\Omega dx\,dy = \Omega = \pi a b \end{array}\right.$$

Sustituyendo:

$$M_z = 2K\left[\frac{1}{a^2}\frac{a^3 b\pi}{4} + \frac{1}{b^2}\frac{ab^3\pi}{4} - \pi a b\right] = -K a b \pi$$

Por lo tanto:
$$\boxed{K = \frac{-M_T}{\pi a b} = \frac{-45\pi}{\pi\cdot 0'3\cdot 0'6} = -250}$$

Sustituyendo:

$$\phi = -250\left[\frac{x^2}{0'3^2} + \frac{y^2}{0'6^2} - 1\right] = -2777'78\,x^2 - 694'44\cdot y^2 + 250$$

Y las tensiones:

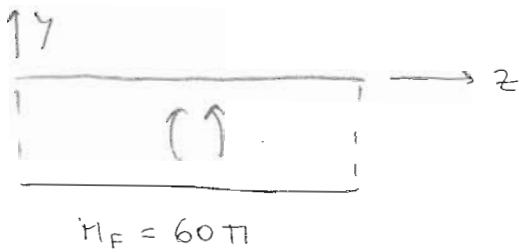
$$\left|\begin{array}{l} \tau_{xz} = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -1388'89\cdot y \\[2ex] \tau_{yz} = \dfrac{-\partial\phi}{\partial x} = 5555'56\cdot x \end{array}\right.$$

El resto son nulas por torsión

Si nos pidieran la inercia torsional:

$$M_T = G\cdot J\cdot\alpha \rightarrow J = \frac{M_T}{G\cdot\alpha} = \frac{\pi a b}{\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]} = 4'072\cdot 10^{-2}\ m^4$$

<u>Flexión:</u> La ley de momentos flectores es:



Las tensiones por flexión son:

$$\sigma_z = \frac{-M_F\cdot y}{I} = \frac{-60\pi\cdot y}{\frac{\pi a b^3}{4}} = -3703'7\cdot y$$

No hay más tensiones debidas a flexión. Por lo tanto, el tensor total de tensiones es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1388'89\cdot y \\ 0 & 0 & 5555'56\cdot x \\ -1388'89\cdot y & 5555'56\cdot x & -3703'7\cdot y \end{bmatrix} \quad (kN/m^2)$$

$\boxed{\text{RECTA AC}}$ $A(0'3, 0, 0)$, $C(0, 0, 2)$ | $z = \dfrac{-20x}{3} + 2$, $y = 0$

$$\underline{T}^{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5555'56\,x \\ 0 & 5555'56\cdot x & 0 \end{bmatrix} \quad (kN/m^2)$$

Las tensiones principales son: $\left| \begin{array}{l} \sigma_I = 5555'56\ x \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{III} = -5555'56 \cdot x \end{array} \right.$

Por lo tanto: $\boxed{\tau_{MAX}^{AC} = \frac{1}{2}\left[\sigma_I - \sigma_{III}\right] = 5555'56 \cdot x}$

2) Idem. en recta BC. $\left| \begin{array}{l} B\,(0,0'6,0) \\ C\,(0,0,2) \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ z = \frac{-10}{3}\,y + 2 \end{array}$

$$\underline{T}^{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1388'89\ y \\ 0 & 0 & 0 \\ -1388'89\ y & 0 & -3703'7 \cdot y \end{bmatrix} \quad (KN/m^2)$$

Las tensiones principales son: $\left| \begin{array}{l} \sigma_I = 462'96 \cdot y \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{III} = -4166'66 \cdot y \end{array} \right.$

Por lo tanto: $\boxed{\tau_{MAX}^{BC} = \frac{1}{2}\left[\sigma_I - \sigma_{III}\right] = 2314'81 \cdot y}$

3) Punto A $\rightarrow$ $\boxed{\tau_{MAX}^{A} = 5555'56 \cdot 0'3 = 1666'67\ KN/m^2}$

4) Punto B $\rightarrow$ $\boxed{\tau_{MAX}^{B} = 2314'81\ 0'6 = 1388'89\ KN/m^2}$

5) Punto C $\rightarrow$ $\boxed{\tau_{MAX}^{C} = 0\ KN/m^2}$

NOTA: Torsión en sección prismática con Función de Prandtl.

Torsión 2.

La figura muestra una barra circular de 5 cm de diámetro empotrada rígidamente en la totalidad de sus secciones transversales extremas. Sobre ella y fuera de su eje longitudinal Z, actúan dos cargas verticales de valor 1.5 kN, en la disposición que se indica en la figura. No se considera el peso propio de la barra.

El material tiene un módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^7$ N/cm² y un coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$. Se pide:

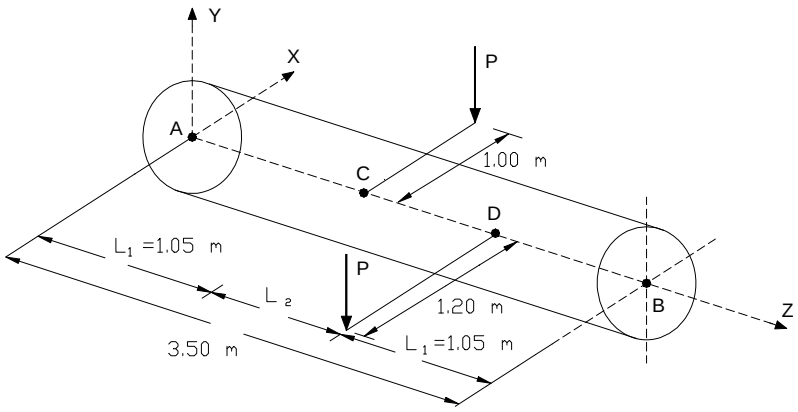
1. Valores de los momentos de torsión T_A y T_B correspondientes a las reacciones de apoyo en los extremos.

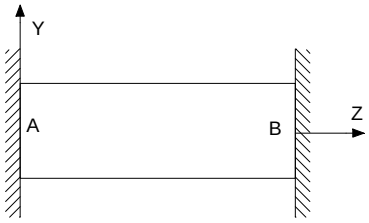
2. Diagrama de momentos de torsión a lo largo del eje Z.

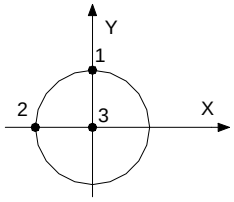
3. Valores del giro ω_z debido a la torsión en las secciones correspondientes a $z = L_1$ y $z = (L_1 + L_2)$.

4. Diagrama del giro ω_z a lo largo del eje Z.

5. Se considera válida la hipótesis de Saint Venant, que permite determinar las tensiones en las secciones de empotramiento a partir de los valores de las reacciones de apoyo, calculadas según la Resistencia de Materiales. Determinar, según lo anterior, el tensor de tensiones en los puntos 1, 2 y 3, pertenecientes a la sección A de empotramiento de la barra.





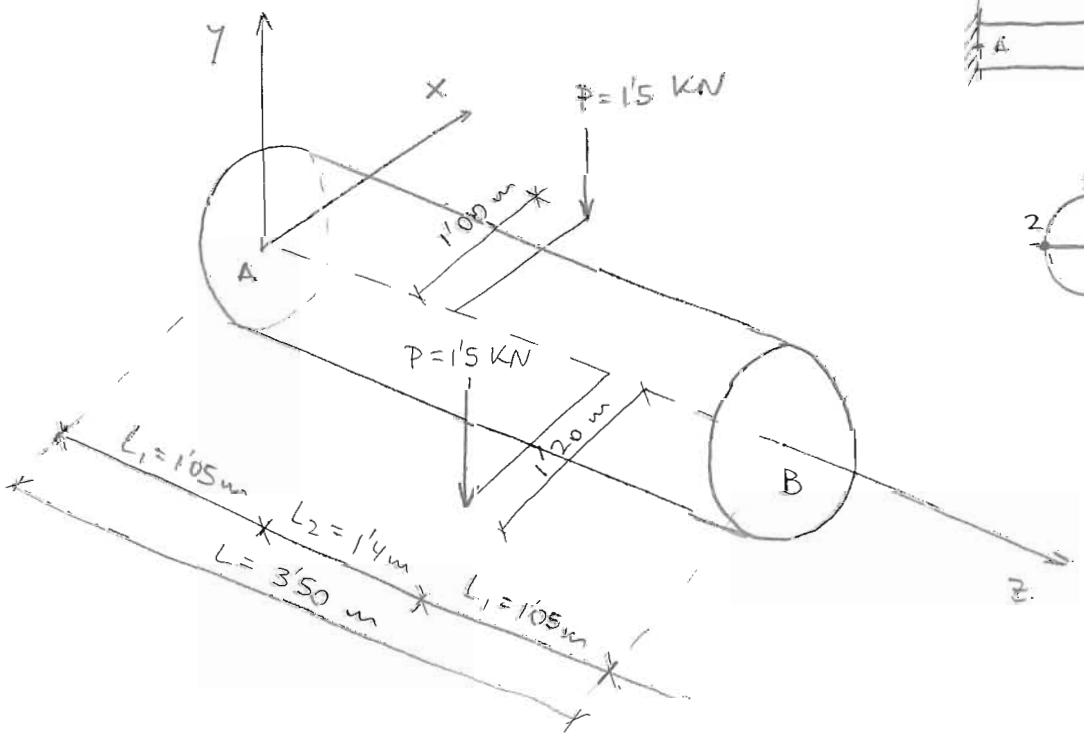


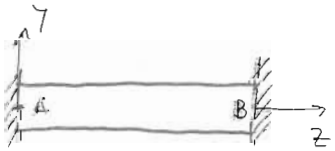
Enunciado: Torsión 2 (45')

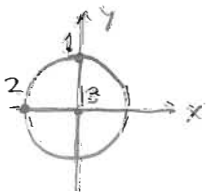
La figura muestra una barra circular de 5 cm de diámetro empotrada rígidamente en la totalidad de sus secciones transversales extremas. Sobre ella, y fuera de su eje longitudinal z, actúan dos cargas verticales P de valor 1'5 KN, en la disposición que se indica en la figura. No se considera el peso propio de la barra.

El material tiene un módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^7 \frac{N}{cm^2}$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0'30$. Se pide:

1) Valores de los momentos de torsión T_A y T_B correspondientes a las reacciones de apoyo en los extremos.
2) Diagrama de momentos de torsión a lo largo del eje z.
3) Valores del giro ω_z debido a la torsión en las secciones correspondientes a $z = L_1$ y $z = (L_1 + L_2)$.
4) Diagrama del giro ω_z a lo largo del eje z.
5) Se considera válida la hipótesis de Saint Venant, que permite determinar las tensiones en las secciones de empotramiento a partir de los valores de las reacciones de apoyo, calculadas según la Resistencia de Materiales. Determinar, según lo anterior, el tensor de tensiones en los puntos 1, 2 y 3, pertenecientes a la sección A de empotramiento de la barra

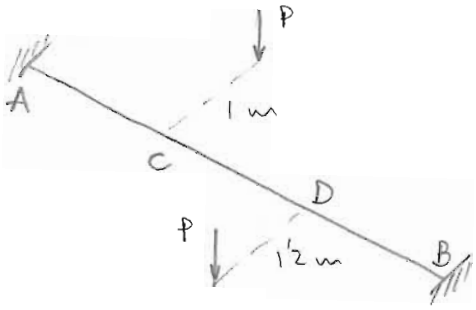






Resolución:

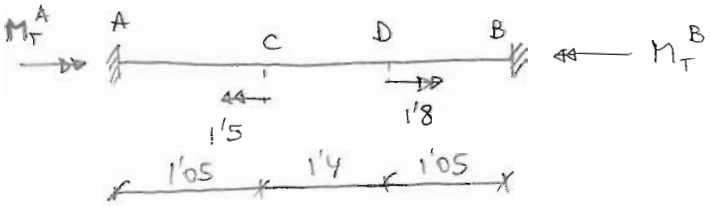
1) Momentos torsores en los apoyos.



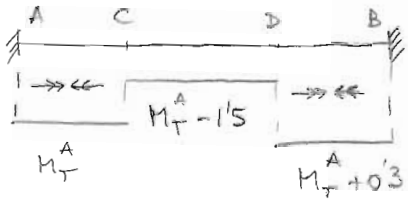
En C: $M_T = P \cdot 1 = 1'5$ KN·m ←←

En D: $M_T = P \cdot 1'2 = 1'8$ KN·m →→

En torsión utilizamos la analogía del axil.



Cargas aplicadas



Ley M_T

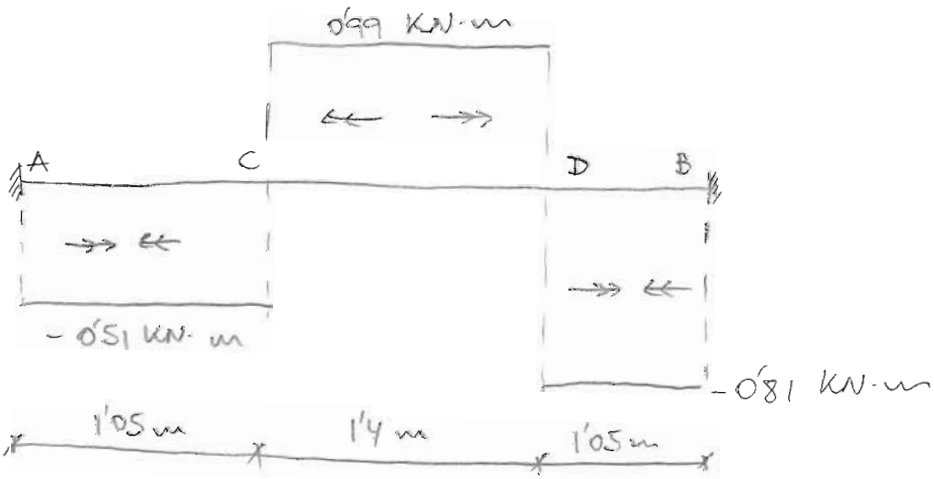
Aplicando el teorema de Mohr

$$\omega_B = 0 = \cancel{\omega_A}^{\,0} + \frac{1}{GJ}\int_A^B M_T = \frac{1}{GJ}\left[M_T^A \cdot 1'05 + \left(M_T^A - 1'5\right)\cdot 1'4 + \left(M_T^A + 0'3\right)\cdot 1'05\right] =$$

Simplificando:

$$\boxed{\begin{array}{l} M_T^A = 0'51 \text{ KN·m} \rightarrow\rightarrow \\ M_T^B = 0'81 \text{ KN·m} \leftarrow\leftarrow \end{array}}$$

2) Ley de torsión a lo largo del eje z.



3) Giros en las secciones $z = L_1$ y $z = (L_1 + L_2)$

En sección circular: $J = \frac{\pi R^4}{2} = 6'136 \cdot 10^{-7}\ m^4$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7'69 \cdot 10^7 \frac{KN}{m^2}$

$G \cdot J = 47'2\ KN \cdot m^2$

$\omega_A = 0\ rad = \omega_B$

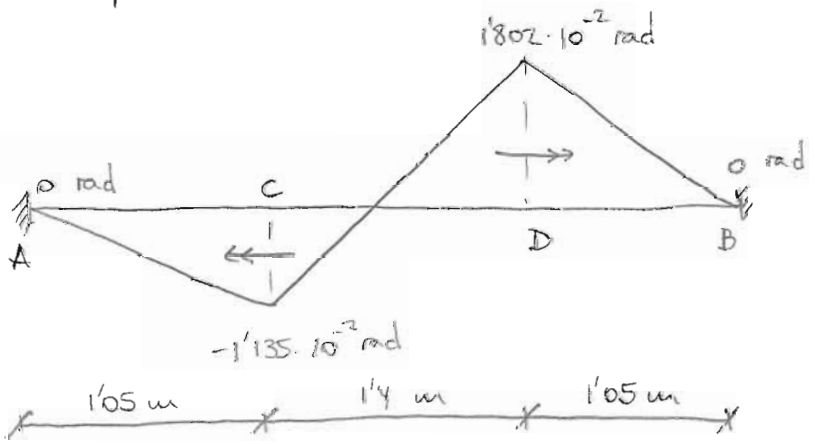
Aplicando Mohr:

$$\boxed{\vec{\omega}_C = \cancel{\vec{\omega}_A}^{\,0} + \frac{1}{GJ}\int_A^C \vec{M}_T(z)\,dz = \frac{1}{47'2}\left[-0'51 \cdot 1'05\right] = -1'135 \cdot 10^{-2}\ rad}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_D = \vec{\omega}_C + \frac{1}{47'2}\left[0'99 \cdot 1'4\right] = 1'802 \cdot 10^{-2}\ rad}$$

Además: $\omega_B = \omega_D + \frac{1}{47'2}\left[-0'81 \cdot 1'05\right] = 0\ rad$

4) Ley de giros ω_z a lo largo del eje z. Los giros en los empotramientos son nulos. Hay quiebros en la ley de giros con los saltos de la ley de momentos torsores y lineal en el resto de los puntos.



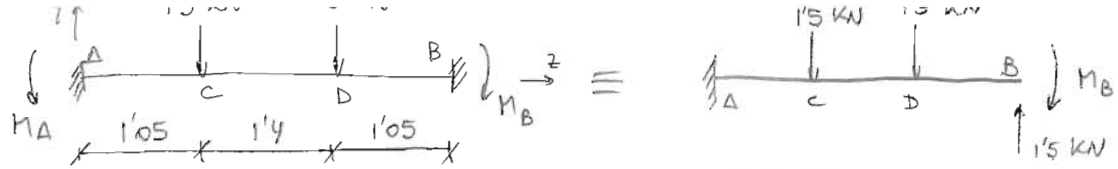
5) Tensor de tensiones en A.

TORSIÓN: En sección circular: $\tau_{xz} = \frac{-M_z \cdot y}{J} = 8'31 \cdot 10^5\, y$

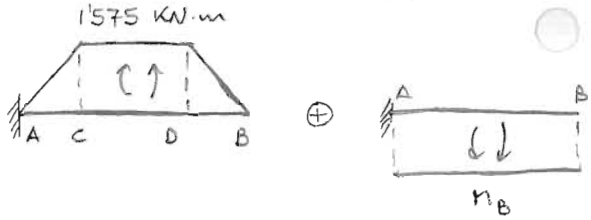
$\tau_{yz} = \frac{M_z \cdot x}{J} = -8'31 \cdot 10^5 \cdot x$

Ya que: $M_z = -0'51\ KN \cdot m$ y $J = 6'136 \cdot 10^{-7}\ m^4$

FLEXIÓN:



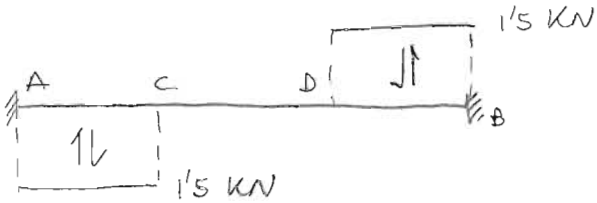
Las leyes de momentos flectores son:



Aplicando la ley de Mohr:

$$\theta_B = 0 = \frac{1}{EI}\left[1'05 \cdot 1'575 + 1'4 \cdot 1'575 - M_B \cdot 3'5\right] = 0 \rightarrow M_B = 1'1025 \text{ KN}\cdot\text{m} = M_A$$

Y la ley de cortantes es:



Las tensiones por flexión son:

$$\sigma_z = \frac{M_A \cdot y}{I} = \frac{1'1025 \cdot y}{\frac{1}{4}\pi R^4} = 3'594 \cdot 10^6 \cdot y$$

$$\tau^F_{yz} = \frac{-Q \cdot M_{est}}{I \cdot b} \xrightarrow{\text{en } 1,2 \text{ y } 3} \tau^F_{yz}(1) = 0 \text{ KN/m}^2$$

$$\tau^F_{yz}(2) = \tau_{yz}(3) = \frac{-1'5 \cdot \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi}}{\frac{1}{4}\pi R^4 \cdot 2R} = -1018'59 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

Por tanto, el tensor de tensiones en la sección A es:

$$\underline{T}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8'31 \cdot 10^5 y \\ 0 & 0 & -8'31 \cdot 10^5 x + \tau^F_{yz} \\ 8'31 \cdot 10^5 y & -8'31 \cdot 10^5 x + \tau^F_{yz} & 3'594 \cdot 10^6 \cdot y \end{bmatrix}$$

Sustituyendo para cada punto:

- PUNTO 1 : $x = 0$, $y = R = 0'025$ m $\rightarrow$ $\underline{T}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20775 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20775 & 0 & 89850 \end{bmatrix}$ (KN/m²)

- PUNTO 2 : $x = -R = -0'025$ m, $y = 0$ $\rightarrow$ $\underline{T}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19756 \\ 0 & 19756 & 0 \end{bmatrix}$ (KN/m²)

- PUNTO 3 : $x = 0$, $y = 0$ $\rightarrow$ $\underline{T}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1019 \\ 0 & -1019 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\text{KN}}{\text{m}^2}\right)$

NOTA: Torsión en sección circular

Enunciado: (extraído de BREVELAS) Torsión 3

Probar que la función:

$$\phi(x,y) = A\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]$$

a, b: semiejes

es una función de tensiones exacta para el problema de la torsión en un cilindro recto de longitud L y sección una elipse de semiejes a, b. Dado M_z en las caras extremas, determinar la máxima tensión tangencial, su punto de aplicación, dirección y el ángulo que gira una cara extrema con relación a la otra

Resolución:

El dato es M_z. Utilizamos la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-2G\alpha$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{-2xA}{a^2} \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{-2A}{a^2} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{-2yA}{b^2} \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{-2A}{b^2}$$

Por tanto, quedará:

$$-2A\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]=-2G\alpha=cte$$

Se desconoce α, pero será constante a determinar. Como además sabemos que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ϕ se anula en todo el contorno, luego es una función exacta. Sabemos también:

$$M_z=2\iint_\Omega \phi\,dx\,dy=2\cdot\iint_\Omega A\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]dx\,dy=$$

$$=2A\underbrace{\iint_\Omega dx\,dy}_{\Omega}-\frac{2A}{a^2}\underbrace{\iint_\Omega x^2\,dx\,dy}_{I_{yy}}-\frac{2A}{b^2}\underbrace{\iint_\Omega y^2\,dx\,dy}_{I_{xx}}=2A\pi ab-\frac{2A}{a^2}\frac{\pi}{4}a^3b-\frac{2A}{b^2}\frac{\pi}{4}ab$$

Simplificando:

$$M_z = 2A\pi ab\left[1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] = A \cdot \pi \cdot a \cdot b$$

$$A = \frac{M_z}{\pi ab}$$

Sustituyendo

$$\phi = \frac{M_z}{\pi ab}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]$$

Y también:

$$-2 \cdot \frac{M_z}{\pi \cdot ab}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] = -2G\alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{M_z}{\pi G ab}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]} \quad (\text{rad/m})$$

Como sabemos que $M_z = G \cdot J \cdot \alpha$ se tiene

$$\boxed{J = \frac{M_z}{G \cdot \alpha} = \frac{M_z}{G \cdot \frac{M_z}{\pi G ab}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}$$

El giro relativo será:

$$\theta = \alpha \cdot L = \frac{M_z}{G \cdot J} \cdot L \quad (\text{rad})$$

Las tensiones tangenciales serán:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-2yA}{b^2} = \frac{-2yM_z}{\pi a b^3}$$

$$\tau_{yz} = \frac{-\partial \phi}{\partial x} = \frac{2xA}{a^2} = \frac{2xM_z}{\pi a^3 b}$$

En las caras extremas se tendrá:

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{t}$ sólo tiene componente tangencial de módulo $|\tau| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$

$$\tau_{\theta z} = |\tau| = \sqrt{\frac{4y^2 M_z^2}{\pi^2 a^2 b^6} + \frac{4x^2 M_z^2}{\pi^2 a^6 b^2}} = \sqrt{\frac{4M_z^2}{\pi^2 a^2 b^2}\left(\frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}\right)} = \frac{2M_z}{\pi a^3 b^3}\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)}$$

El máximo se produce en el extremo del semieje menor $(0,b)$.

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{2M_z}{\pi a^3 b^3}\sqrt{(a^4 b^2)} = \frac{2M_z a^2 b}{\pi a^3 b^3} = \frac{2M_z}{\pi a b^2}}$$

Por tanto

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{2}{\pi a b^2} \cdot G \cdot \alpha \cdot \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{2G\alpha a^2 b}{a^2 + b^2}}$$

NOTA: Torsión en barra de sección elíptica usando Prandtl.

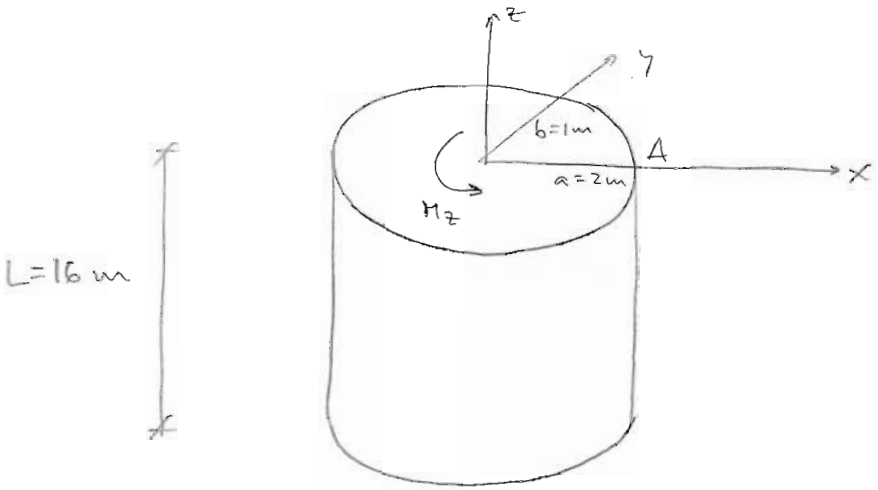
Enunciado: (extraído de BREVELAS) Torsión 4

Un momento torsor M_z aplicado en la barra de la figura produce un giro entre las secciones extremas de 0'004 rad.

a) Sabiendo que la función de tensión es $\phi = K\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$, demostrar que la inercia torsional es $J = \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2)$.

b) Calcular el momento torsor M_z. El material tiene constantes $E = 2 \cdot 10^4$ MPa y $\nu = 0'2$.

c) Se supone que, simultáneamente con el momento torsor, actúa un axil de tracción de valor total $N_z = \frac{2 M_z}{a}$. Se desean obtener las tensiones principales en el punto A de la sección central y los cosenos directores de los planos sobre los que actúa, con sus correspondientes signos.



Resolución:

1) 2) Utilizando la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2 G \alpha \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8333333 \ \frac{kN}{m^2}$$

Resolviendo: $-2K\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] = -2G\alpha = cte \qquad \alpha = 2'5 \cdot 10^{-4}$ rad

Sustituyendo los valores numéricos:

$$-2K\left[\frac{1}{4} + 1\right] = -2 \cdot 8333333 \cdot \frac{0'004}{16} \rightarrow K = \frac{5000}{3} \ \frac{kN}{m}$$

Como la ecuación del contorno es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\phi = 0$ en Γ.

Sabemos también que, en una barra elíptica:

$$\boxed{M_z = K \pi a b = 10472 \ KN \cdot m}$$

Como sabemos que $M_z = G \cdot J \cdot \alpha$, se tiene

$$\boxed{J = \frac{M_z}{G \cdot \alpha} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = 5'027 \cdot m^4}$$

3) Axil de tracción.

$$N_z = \frac{2 M_z}{a} = 10472 \ KN$$

Por tanto:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{\pi a b} = 1666'67 \ KN/m^2$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-2 y M_z}{\pi a b^3} = -3333'33 \cdot y$$

$$\tau_{yz} = \frac{-\partial \phi}{\partial x} = \frac{2 x M_z}{\pi a^3 b} = 833'33 \cdot x$$

El tensor de tensiones será:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1666'67 \\ 0 & 1666'67 & 1666'67 \end{pmatrix} = 1666'67 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en } A(z,0)$$

Y los autovalores y autovectores son:

$$\sigma_I = 2696'73 \frac{KN}{m^2} \longrightarrow \bar{n}^I = \langle 0, 0'526, 0'851 \rangle^T$$

$$\sigma_{II} = 0 \frac{KN}{m^2} \longrightarrow \bar{n}^{II} = \langle 1, 0, 0 \rangle^T$$

$$\sigma_{III} = -1030'06 \frac{KN}{m^2} \longrightarrow \bar{n}^{III} = \langle 0, 0'851, -0'526 \rangle^T$$

NOTA: Torsión en barra de sección elíptica usando Prandtl.

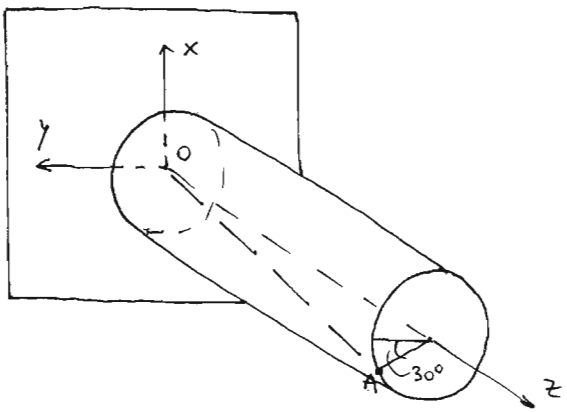
Enunciado: Torsión 5

La figura muestra una barra de sección circular de radio R y longitud L. La sección de un extremo tiene impedidos los movimientos de todos sus puntos. Sobre la sección del extremo opuesto actúan simultáneamente un momento torsor $M_z = M$ y un momento flector M_y. El material posee las siguientes características elásticas: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y $\nu = 0'30$.

En la sección del extremo fijo se señala el centro O y sobre la sección del extremo libre se sitúa el punto A, de la manera que se muestra en la figura. Se pide:

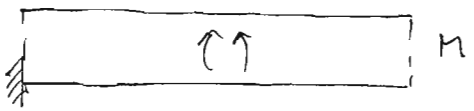
1) Determinar las tensiones principales y sus direcciones, así como los movimientos U, V y W en el punto A.
2) Idem en el punto genérico A', situado sobre la recta OA, en función de la coordenada z de A'.

NOTA: Para el cálculo de las tensiones y deformaciones de flexión se aceptan las distribuciones preconizadas en Resistencia de Materiales.

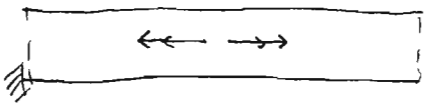


Resolución:

Las leyes de esfuerzo que existen en la barra son:



FLEXIÓN

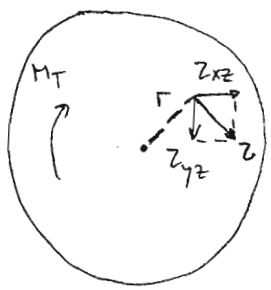


TORSIÓN

Torsión en sección circular:

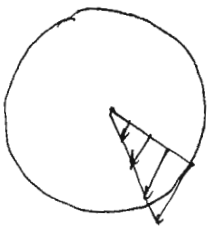
$$u = -\alpha \cdot y$$
$$v = \alpha \cdot x$$
$$\alpha = \alpha_1 + \theta (z - z_1)$$
$$\theta = \frac{d\alpha}{dz} = cte \qquad \theta = \frac{M_T}{G \cdot J} \qquad J = \frac{\pi R^4}{2}$$
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$
$$\gamma_{xz} = -\theta y$$
$$\gamma_{yz} = \theta \cdot z$$
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$
$$\gamma_{xz} = -\theta \cdot y$$
$$\gamma_{yz} = \theta \cdot x$$
$$\tau_{xz} = \frac{-M_T}{J} \cdot y$$
$$\tau_{yz} = \frac{M_T}{J} \cdot x$$

En sección circular se suele trabajar con τ.



$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{M_T}{J} \cdot r$$

Se demuestra que τ es perpendicular al radio vector del punto, y el sentido de τ será positivo si lleva el mismo que M_T. La distribución de tensiones de τ es máxima en el contorno.



$$\tau_{MAX} = \tau(r=R) = \frac{M_T}{\frac{\pi R^4}{2}} \cdot R = \frac{2 M_T \cdot R}{\pi R^4} = \frac{2 M_T}{\pi R^3}$$

1) Punto A

$$x_A = -R \operatorname{sen} 30 = -\frac{R}{2}$$

$$y_A = +R \cos 30 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

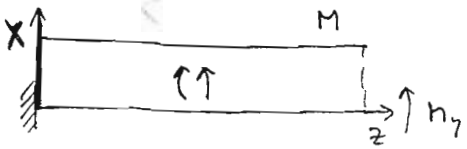
- Momento torsor:

$$\tau^T_{xz,A} = \frac{-M_T}{J} \cdot y_A = \frac{-M \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{-M\sqrt{3}}{\pi R^3}$$

$$\tau^T_{yz,A} = \frac{M_T}{J} \cdot x_A = \frac{M \cdot \frac{-R}{2}}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{-M}{\pi R^3}$$

$$\underline{T_A}^T = \frac{-M}{\pi R^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ⇐ TENSOR DE TENSIONES DEBIDO AL TORSOR

- Momento flector:



$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_z = \frac{-M}{I} \cdot x \qquad \text{(Fórmula de Navier)}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x S}{I \cdot b} = 0 \qquad \text{ya que } Q_x = 0$$

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y \cdot S}{I \cdot b} = 0 \qquad \text{ya que } Q_y = 0$$

Por tanto:

$$\sigma_z = \frac{-M}{\frac{\pi R^4}{4}} \cdot x = \frac{-4Mx}{\pi R^4}$$

$$\sigma^F_{z,A} = \frac{-4 \cdot M \cdot x}{\pi R^4} = \frac{-4M}{\pi R^4} \cdot \frac{-R}{2} = \frac{2M}{\pi R^3}$$

Y el tensor de tensiones debido a flexión:

$$\underline{T}_A^F = \frac{M}{\pi R^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• Tensor total de tensiones en A:

Puedo sumar el tensor debido a torsión con el de flexión, ya que estamos en elasticidad lineal y ambos tensores están referidos a los mismos ejes.

$$\underline{T_A} = \frac{-M}{\pi R^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Y ahora se pueden obtener ya los autovalores y autovectores:

$$\sigma_1 = \frac{3'236\,M}{\pi R^3} \qquad \bar{n}_1 = \langle -0'455, -0'263, 0'851 \rangle$$

$$\sigma_2 = 0 \qquad \bar{n}_2 = \langle -0'5, 0'866, 0 \rangle$$

$$\sigma_3 = \frac{-1'236\,M}{\pi R^3} \qquad \bar{n}_3 = \langle 0'737, 0'425, 0'526 \rangle$$

El campo de movimientos será:

$$\left| \begin{array}{l} u = -\alpha \cdot y \\ v = \alpha \cdot x \\ w = 0 \end{array} \right.$$

$$\theta = \frac{d\alpha}{dz} = \frac{M_T}{G \cdot J} \Rightarrow \int_{\alpha_1}^{\alpha} d\alpha = \int_{z_1}^{z} \frac{M_T}{G \cdot J} \cdot dz$$

$$\alpha = \alpha_1 + \theta\,(z - z_1) = \alpha_1 + \frac{M_T}{GJ}(z - z_1)$$

En el empotramiento: $\left| \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \frac{M_T}{GJ} \cdot z$

En A : $z = L$

$$\alpha_A = \frac{M}{G \cdot J} \cdot L$$

$$u_A^T = -\frac{ML}{GJ} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{-MLR\sqrt{3}}{G \cdot \frac{\pi R^4}{2} \cdot 2} = \frac{-ML\sqrt{3}}{G\pi R^3}$$

$$v_A^T = \frac{ML}{GJ} \cdot \frac{-R}{2} = \frac{-MLR}{G \cdot \frac{\pi R^4}{2} 2} = \frac{-ML}{G\pi R^3}$$

$$w_A = 0$$

En flexión : $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$\sigma_z \neq 0 = \frac{-Mx}{I}$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{-Mx}{EI}$$

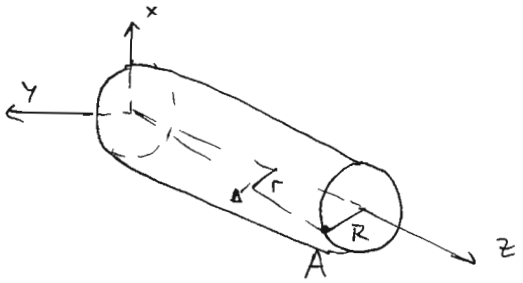
$$\varepsilon_x = \frac{-\nu \sigma_z}{E} = \varepsilon_y = 0$$ (se hace = 0 porque se admite la simplificación de Resistencia de Materiales)

Por tanto :

$$\varepsilon_z = \frac{-M \cdot x}{E \cdot \frac{\pi R^4}{4}} = \frac{-4Mx}{E\pi R^4}$$

$$w_A = \int_0^L \varepsilon_z \, dz = \int_0^L \frac{-4Mx}{E\pi R^4} \, dz = \int_0^L \frac{-4M}{E\pi R^4} \cdot \frac{-R}{2} \, dz = \frac{2ML}{E\pi R^3}$$

3) Igual en punto genérico A'.



$$\frac{r}{z} = \frac{R}{L} \Rightarrow r = \frac{Rz}{L}$$

Las tensiones en A' serán:

$$\text{TENSIONES EN } A' = (\text{TENSIONES EN } A) \cdot \frac{z}{L}$$

Y los movimientos:

$$\text{MOVIMIENTOS EN } A' = (\text{MOVIMIENTOS EN } A) \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^2$$

NOTA: Problema de torsión y flexión en cilindro de sección circular.

Torsión 6.

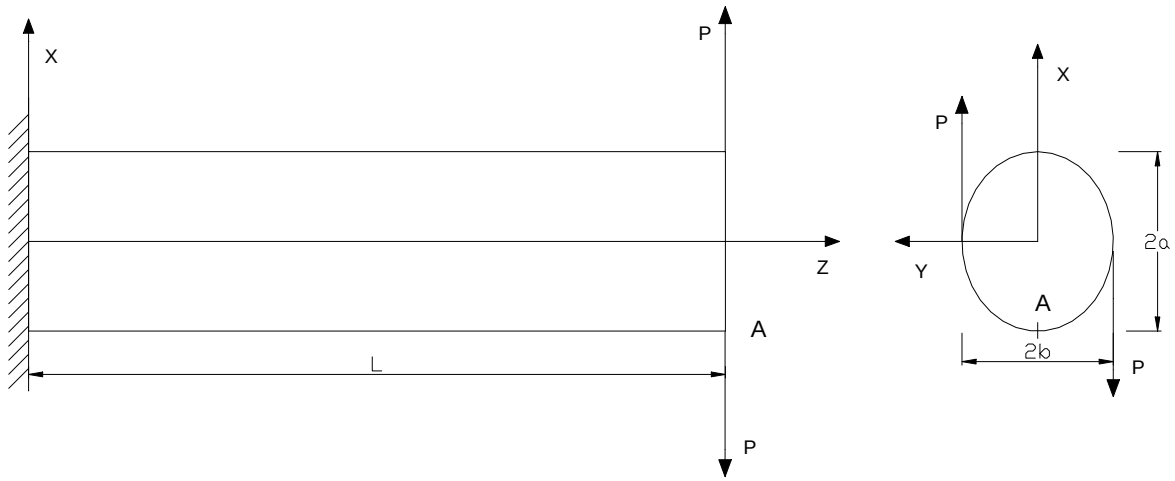
El cilindro de sección elíptica de la figura ($a \geq b$) está empotrado en un extremo y en el otro, libre, se encuentra sometido a las dos fuerzas P y -P indicadas. Se pide:

1. Máxima tensión tangencial.

2. Desplazamiento del punto A referido a los ejes (x, y, z).

3. Distribución de las tensiones a aplicar a la sección z = L, normal a la misma, de forma que permanezca plana al aplicar las fuerzas anteriores P y -P. Obtener la resultante de dichas tensiones (fuerzas y momentos) respecto al centro de gravedad de la sección.

NOTA: No se considera el peso propio. El material tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de Poisson ν.

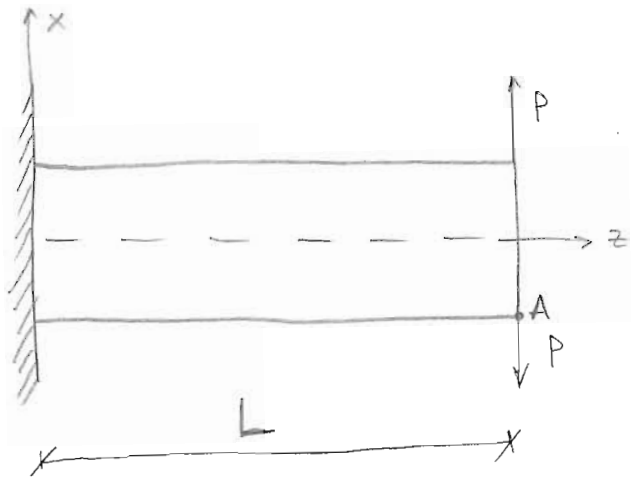


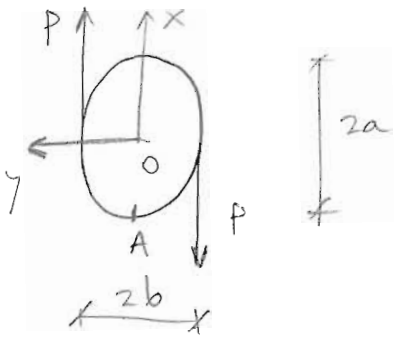
Enunciado: Torsión 6 (60')

El cilindro de sección elíptica de la figura ($a \geq b$) está empotrado en un extremo y en el otro está libre. Se encuentra sometido a las dos fuerzas P y -P indicadas. Se pide:

1) Máxima tensión tangencial.
2) Desplazamiento del punto A referido a los ejes (x, y, z).
3) Distribución de las tensiones a aplicar a la sección $z = L$, normal a la misma, de forma que permanezca plana al aplicar las fuerzas anteriores P y -P. Obtener la resultante de dichas tensiones (fuerzas y momentos) respecto al centro de gravedad de la sección.

NOTA: No se considera el peso propio. El material tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de Poisson ν.





Resolución:

1) Si no nos dan ni la función de Prandtl ni la de alabeo, se tantea la función de Prandtl.

$\phi(x,y)$ debe cumplir $\begin{cases} \nabla^2 \phi = cte = -2G\alpha \\ \phi|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$

El contorno lateral es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Por lo tanto, tanteamos:

$$\phi(x,y) = A\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]$$

Comprobamos las condiciones:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = 2A\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] = cte \checkmark$$

$$2A\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] = -2G\alpha \longrightarrow A = -G\cdot\alpha\cdot\left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right]$$

Por lo tanto, la función de Prandtl en nuestro caso es:

$$\phi(x,y) = -G\cdot\alpha\left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right]\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]$$

El dato que nos dan es el momento torsor:

$$M_z = 2\cdot\iint_\Omega \phi \, d\Omega = 2A\iint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) d\Omega$$

$$= 2A\left[\frac{1}{a^2}\underbrace{\iint_\Omega x^2 d\Omega}_{I_y = \frac{\pi}{4}ba^3} + \frac{1}{b^2}\underbrace{\iint_\Omega y^2 d\Omega}_{I_x = \frac{\pi}{4}ab^3} - \underbrace{\iint_\Omega d\Omega}_{\pi a b}\right] = -A\cdot\pi\cdot a\cdot b$$

De donde: $\boxed{A = \frac{-M_z}{\pi a b}} \longrightarrow \boxed{\phi(x,y) = \frac{-M_z}{\pi a b}\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]}$

Si nos pidieran la inercia a torsión: $M_z = GJ\cdot\alpha \rightarrow J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$

Las tensiones son:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{2\cdot M_z}{\pi a b^3}\cdot y$$

$$\tau_{yz} = \frac{-\partial\phi}{\partial x} = \frac{2\cdot M_z}{\pi a^3 b}\cdot x$$

Como $M_z = -2P\cdot b$ se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{4P}{\pi a b^2}\cdot y \\ \tau_{yz} &= \frac{-4P}{\pi a^3}\cdot x\end{aligned}}$$

y el resto son nulas

El tensor de tensiones genérico queda.

$$\underline{T} = \frac{4P}{\pi a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & y/b^2 \\ 0 & 0 & -x/a^2 \\ y/b^2 & -x/a^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad K = \frac{4P}{\pi a}$$

Las tensiones principales resultan:

$$|\underline{T} - \lambda \cdot I| = 0 \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & Ky/b^2 \\ 0 & -\lambda & -Kx/a^2 \\ Ky/b^2 & -Kx/a^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda \cdot \frac{K^2 y^2}{b^4} + \lambda \frac{K^2 x^2}{a^4} = 0 \longrightarrow \lambda = 0$$

$$\lambda^2 = \left[\frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}\right] K^2 \longrightarrow \lambda = \pm K\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \sigma_{I,III} \qquad \sigma_{II} = 0$$

Por lo tanto:

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = K\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \frac{4P}{\pi a}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

El máximo estará en $\left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right]$ máximo, compatible con las condiciones de contorno.

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{1}{b^2} - \frac{x^2}{a^2 b^2} + \frac{x^2}{a^4} = f(x)$$

$$f'(x) = 0 = \frac{-2x}{a^2 b^2} + \frac{2x}{a^4} = \frac{2x}{a^2}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right] = 0 \rightarrow x = 0$$

En el contorno hay dos puntos con $x = 0$:

$$(x = 0, y = b) \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{4P}{\pi a b}$$

$$(x = 0, y = -b) \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{4P}{\pi a b}$$

Por tanto: $\boxed{\tau_{MAX} = \frac{4P}{\pi a b}}$

2) Desplazamiento del punto A. El campo general de desplazamientos (Saint-Venant) es:

$$\begin{cases} u = -\alpha \cdot y \cdot z \\ v = \alpha \cdot x \cdot z \\ w = \alpha \cdot f(x,y) \end{cases} \qquad \text{con } \alpha = \frac{M_T}{GJ}$$

Como $M_T = cte \rightarrow \alpha = cte \rightarrow \theta = \alpha \cdot z = \frac{M_T}{G \cdot J} \cdot z$

Necesito obtener la función de alabeo $f(x,y)$. Igualo Prandtl y S-V:

$$\tau_{xz} = \frac{M_T}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] = \frac{4P}{\pi a b^2} y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - y = \frac{4P \cdot J}{M_T \cdot \pi a b^2} y = \frac{4\cancel{P} \frac{\cancel{\pi} a^3 \cancel{b^3}}{a^2+b^2}}{-2\cancel{P}/b \, \cancel{\pi} a \cancel{b^2}} \cdot y = \frac{-2a^2}{a^2+b^2} \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2a^2 y}{a^2+b^2} + y = y\left[\frac{a^2+b^2-2a^2}{a^2+b^2}\right] = y\left[\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right]$$

Integrando: $f(x,y) = y\left[\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right] x + g(y)$ (I)

y también:

$$\tau_{yz} = \frac{M_T}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] = \frac{-4P}{\pi a^3} x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + x = \frac{-4PJ}{M_T \pi a^3} x = \frac{\cancel{-}4\cancel{P} \cdot \frac{\cancel{\pi} \cancel{a^3} b^3}{a^2+b^2}}{\cancel{-}2\cancel{P} b \, \cancel{\pi} \cancel{a^3}} \cdot x = \frac{2b^2}{a^2+b^2} \cdot x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2b^2 x}{a^2+b^2} - x = x\left[\frac{2b^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}\right] = x\left[\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right]$$

Integrando: $f(x,y) = x\left[\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right] \cdot y + h(x)$ (II)

Combinando (I) y (II) $\rightarrow$ $g(y) = h(x) = 0$

$$f(x,y) = x \cdot y\left[\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right]$$

Sustituyendo y operando en el campo de movimientos:

$$\alpha = \frac{M_T}{G \cdot J} = \frac{-2Pb}{\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}} = \frac{-4P(1+\nu)(a^2+b^2)}{E \cdot \pi \cdot a^3 b^2}$$

$$u = -\alpha \cdot y \cdot z = \frac{4P(1+\nu)(a^2+b^2)}{E \cdot \pi \cdot a^3 \cdot b^2} \cdot y \cdot z$$

$$v = \alpha \cdot x \cdot z = \frac{-4P(1+\nu)(a^2+b^2)}{E \cdot \pi \cdot a^3 b^2} x \cdot z$$

$$w = \alpha \cdot f(x,y) = \frac{-4P(1+\nu)(a^2+b^2)(b^2-a^2)}{E \cdot \pi \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot (a^2+b^2)} x \cdot y = \frac{-4P(1+\nu)(b^2-a^2)}{E \cdot \pi \cdot a^3 \cdot b^2} xy$$

y en el punto $A(-a, 0, L)$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \frac{4P(1+\nu)(a^2+b^2) \cdot L}{E \cdot \pi \cdot a^2 b^2} \\ w &= 0 \end{aligned}}$$

3) Debido al alabeo, la sección no permanece plana al aplicar el momento torsor. Por lo tanto, nos piden averiguar qué tensiones hay que aplicar para que se anulen los movimientos w debidos al alabeo.

El alabeo es $w = K \cdot x \cdot y$ con $K = \frac{-4P(1+\nu)(b^2-a^2)}{E \cdot \pi \cdot a^3 \cdot b^2}$

La tensión que hay que introducir es:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z + \nu(\underbrace{\cancel{\sigma_x}}_{0} + \underbrace{\cancel{\sigma_y}}_{0})\right] = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} \rightarrow w = \frac{\sigma_z}{E} \cdot z + C_1$$

• En el empotramiento. $w(z=0)=0 \rightarrow C_1=0$

• En $z=L \rightarrow \quad w=\frac{\sigma_z}{E}\cdot L$

Sumando ambos estados:

$$K\cdot x\cdot y+\frac{\sigma_z}{E}L=0 \longrightarrow \boxed{\sigma_z=\frac{-K\cdot E}{L}\cdot x\cdot y}$$

$$\boxed{\sigma_z=\frac{4P(1+\nu)(b^2-a^2)}{\pi a^3 b^2 L}\cdot x\cdot y}$$

Las fuerzas y momentos resultantes respecto al c.d.g son:

$$N=\iint_\Omega \sigma_z\, d\Omega=\frac{-K\cdot E}{L}\underbrace{\iint_\Omega x\cdot y\, d\Omega}_{\text{Producto inercia respecto ejes ppales}}=0$$

$$M_x=\iint_\Omega \sigma_z\, y\cdot d\Omega=\frac{-K\cdot E}{L}\iint_\Omega y^2\cdot x\, d\Omega=\frac{-K\cdot E}{L}\int_{-b}^{b}\int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} y^2 x\, dx\, dy=$$

$$=\frac{-K\cdot E}{L}\int_{-b}^{b} y^2\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dy=0$$

$$M_y=\iint_\Omega \sigma_z\cdot x\cdot d\Omega=\frac{-K\cdot E}{L}\iint_\Omega x^2 y\, d\Omega=\frac{-K\cdot E}{L}\int_{-b}^{b}\int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} x y^2\, dx\, dy=$$

$$=\frac{-K\cdot E}{L}\int_{-b}^{b}\frac{x^3}{3}y\Bigg|_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dy=0$$

Para resolver estas integrales hay que hacer los cambios:

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos\theta \\ y=b\cdot\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

NOTA: Problema de torsión en sección elíptica (Prandtl y Saint-Venant)

Torsión 7.

Una viga recta de longitud L cuya sección es un triángulo equilátero de lado a = 0.2 metros tiene un extremo empotrado y el otro libre. Sobre la barra actúa un momento torsor m_t = 8.16 kN·m/m uniformemente repartido en toda su longitud. Sabiendo que el módulo de elasticidad transversal es G = $8 \cdot 10^4$ MPa, se pide:

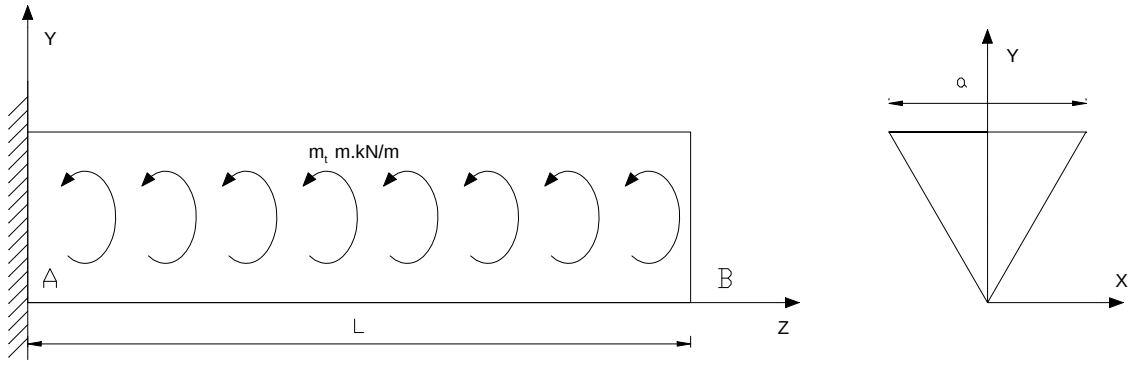
1. Calcular la función de tensiones que resuelve el problema de torsión, respecto del sistema de referencia indicado en la figura.

2. Hallar el valor de la rigidez torsional (G·J).

3. Si la longitud de la barra es L = 3 m, hallar el ángulo de giro de la sección B del extremo libre.

4. Calcular la máxima tensión tangencial que se produce en la barra.

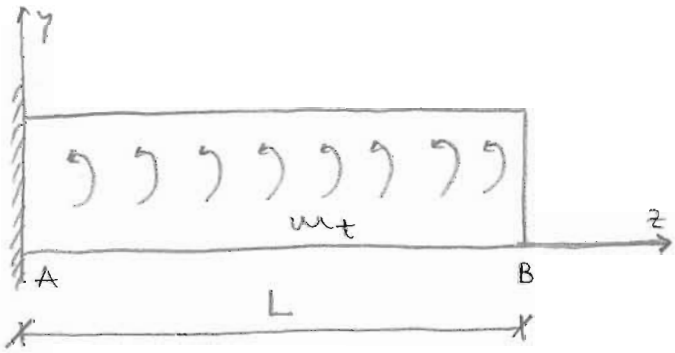
5. Hallar la función de Saint-Venant de la sección en la referencia indicada.

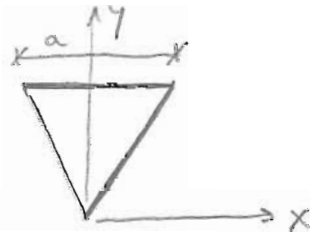


Enunciado Torsión 7 (50')

Una viga recta de longitud L cuya sección es un triángulo equilátero de lado $a = 0'20$ metros tiene un extremo empotrado y el otro libre. Sobre la barra actúa un momento torsor $m_t = 8'16$ KN·m/m uniformemente repartido en toda su longitud. Sabiendo que el módulo de elasticidad transversal es $G = 8 \cdot 10^4$ MPa, se pide:

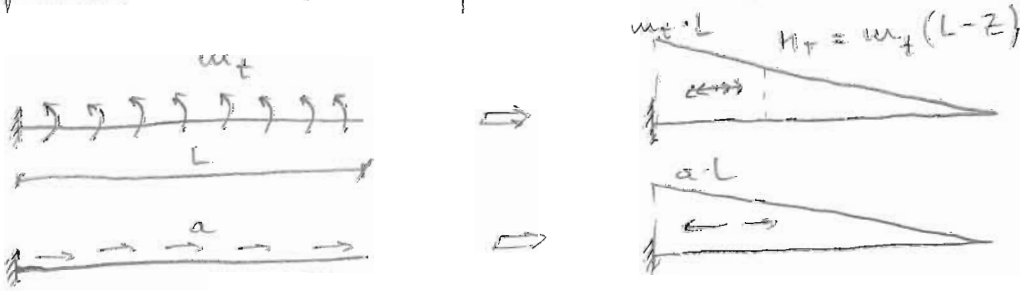
1) Calcular la función de tensiones que resuelve el problema de torsión, respecto del sistema de referencia indicado en la figura.
2) Hallar el valor de la rigidez torsional $G \cdot J$.
3) Si la longitud de la barra es $L = 3$ m, hallar el ángulo de giro de la sección B del extremo libre.
4) Calcular la máxima tensión tangencial que se produce en la barra
5) Hallar la función de Saint-Venant de la sección en la referencia indicada.





Resolución:

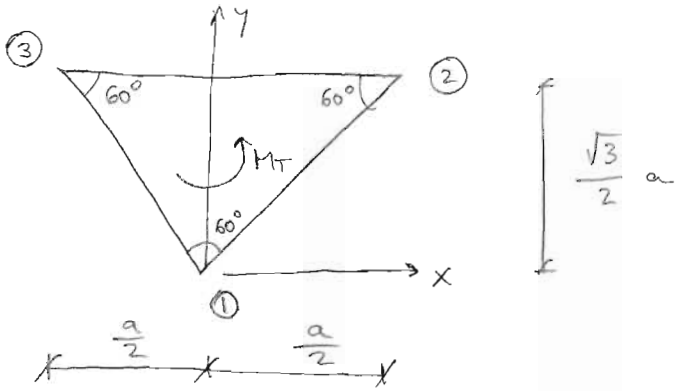
1) Los esfuerzos serán (analogía del axil):



Hay que tantear una función de Prandtl que cumpla:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -2 \cdot G \cdot \alpha = cte \\ \phi \big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

(α no es cte., pero de momento lo supongo)



Las ecuaciones de las caras que forman el contorno lateral son:

CARA ①-② : $y = \sqrt{3}\,x \rightarrow y - \sqrt{3}\,x = 0$

CARA ②-③ : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a \rightarrow y - \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0$

CARA ①-③ : $y = -\sqrt{3}\,x \rightarrow y + \sqrt{3}\,x = 0$

Por lo tanto, la funcion de tensiones es:

$$\phi = A\left(y - \sqrt{3}\,x\right)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(y + \sqrt{3}\,x\right) = A\left[y^3 - \frac{a\sqrt{3}}{2}y^2 - 3x^2y + \frac{3a\sqrt{3}}{2}x^2\right]$$

Ahora hay que comprobar que el laplaciano es constante.

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = A\left[-6y + 3a\sqrt{3} + 6y - a\sqrt{3}\right] = A\cdot 2\sqrt{3}\,a = cte$$

$$A\cdot 2\sqrt{3}\,a = -2G\cdot\alpha \rightarrow A = \frac{-G\cdot\alpha}{a\sqrt{3}}$$

Hay que ponerlo en función de M_T.

$$M_T = 2\iint_\Omega \phi(x,y)\,d\Omega = 2A\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\int_{\frac{-y}{\sqrt{3}}}^{\frac{y}{\sqrt{3}}}\left[y^3 - \frac{a\sqrt{3}}{2}y^2 - 3x^2y + \frac{3a\sqrt{3}}{2}x^2\right]dx\,dy =$$

$$= 2A\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left[y^3x - \frac{a\sqrt{3}}{2}y^2x - x^3y + \frac{a\sqrt{3}}{2}x^3\right]\Bigg|_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}}dy =$$

$$= 4A\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left[\frac{2y^4}{3\sqrt{3}} - \frac{ay^3}{3}\right]dy = 4A\left[\frac{2y^5}{3\sqrt{3}\cdot 5} - \frac{ay^4}{4\cdot 3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{-3Aa^5}{80}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{A = \frac{-80\,M_T}{3a^5}}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\phi = \frac{-80\, M_T}{3a^5}\left[y^3 - \frac{a\sqrt{3}}{2}\, y^2 - 3x^2 y + \frac{3a\sqrt{3}}{2}\, x^2\right]}$$

2) Rigidez torsional $G \cdot J$.

$$A = \frac{-80\, M_T}{3a^5} = \frac{-G \cdot \alpha}{\sqrt{3} \cdot a} \longrightarrow \boxed{J = \frac{3a^4}{80\sqrt{3}}} \quad \boxed{GJ = \frac{3a^4 \cdot G}{80\sqrt{3}}}$$

INERCIA A TORSIÓN — RIGIDEZ TORSIONAL

3) Giro de B. $L = 3\ m$. Aplicando Mohr:

$$\vec{\omega}_B = \cancel{\vec{\omega}_A}^{\,0} + \frac{1}{GJ}\int_A^B \overleftrightarrow{M_T}(z)\, dz = \frac{1}{GJ}\,\frac{1}{2}\, m_T \cdot L \cdot L = \frac{m_T L^2}{2GJ}$$

$$G = 8 \cdot 10^7\ \frac{KN}{m^2}$$

$$J = \frac{3 \cdot 0'2^4}{80\sqrt{3}} = 3'464 \cdot 10^{-5}\ m^4$$

$$G \cdot J = 2771'281\ KN \cdot m^2$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\vec{\omega}_B = 1'325 \cdot 10^{-2}\ rad}$$

4) Máxima tensión tangencial en la barra

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-80\, M_T}{3a^5}\left[3y^2 - a\sqrt{3}\, y - 3x^2\right]$$

$$\tau_{yz} = \frac{-\partial \phi}{\partial x} = \frac{80\, M_T}{3a^5}\left[-6xy + 3a\sqrt{3}\, x\right]$$

No hay más tensiones

Las tensiones principales serán:

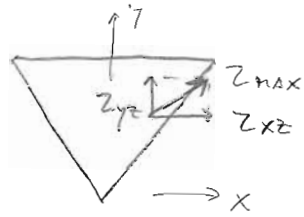
$$|\underline{T} - \lambda I| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & -\lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda \tau_{xz}^2 + \lambda \tau_{xy}^2 = 0 \longrightarrow \lambda = 0 = \sigma_{II}$$

$$\lambda^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \longrightarrow \sigma_{I,III} = \pm\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

Por lo tanto:

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\left(\sigma_I - \sigma_{III}\right) = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$



Sustituyendo:

$$\tau_{MAX} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{80\, M_T}{3a^5}\sqrt{\left[3y^2 - a\sqrt{3}\,y - 3x^2\right]^2 + \left[-6xy + 3a\sqrt{3}\,x\right]^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{MAX}}{\partial x} = 0 \rightarrow 36x^3 + 36xy^2 + 54a^2x - 60\sqrt{3}\,axy = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\frac{\partial \tau_{MAX}}{\partial y} = 0 \rightarrow 36y^3 + 36x^2y - 30\sqrt{3}\,ax^2 + 6a^2y - 18\sqrt{3}\,ay^2 = 0$$

$$\text{con } x=0 \rightarrow 36y^3 + 6a^2y - 18\sqrt{3}\,ay^2 = 0 \qquad \boxed{y=h}$$

Entonces:

$$\tau_{MAX} = \frac{80\, M_T}{3a^5}\sqrt{\left(3h^2 - a\sqrt{3}\,h\right)^2 + 0^2} = \frac{80\, M_T}{3a^5}\left[3h^2 - a\sqrt{3}\,h\right]$$

Como $h = a\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \tau_{MAX} = \frac{20\, M_T}{a^3}$

Y el M_T máximo se da en el empotramiento.

$$M_T = m_T \cdot L$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{20\, m_T \cdot L}{a^3} = 61200\ KN/m^2}$$

5) Función de alabeo. Como ya tengo las tensiones por Prandtl, puedo igualar:

$$\tau_{xz} = \frac{M_T}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] = \frac{-80\, M_T}{3a^5}\left[3y^2 - \sqrt{3}\,ay - 3x^2\right]$$

$$\frac{1}{\frac{3a^4}{80\sqrt{3}}}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] = \frac{-80}{3a^5}\left[3y^2 - \sqrt{3}\,ay - 3x^2\right]$$

$$\sqrt{3}\,a\left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] = -3y^2 + \sqrt{3}\,ay + 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{3}a}\left[-3y^2 + \sqrt{3}ay + 3x^2 + \sqrt{3}ay\right] = \frac{1}{\sqrt{3}a}\left[3x^2 - 3y^2 + 2\sqrt{3}ay\right]$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}a}\left[x^3 - 3xy^2 + 2\sqrt{3}a\,xy\right] + g(y) \quad (1)$$

y también:

$$\tau_{yz} = \frac{M_T}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] = \frac{80\,M_T}{3a^5}\left[-6xy + 3a\sqrt{3}\,x\right]$$

$$\frac{1}{\frac{3a^4}{80\sqrt{3}}}\left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] = \frac{80}{3a^5}\left[-6xy + 3a\sqrt{3}\,x\right]$$

$$\sqrt{3}a\left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] = -6xy + 3a\sqrt{3}\,x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}a}\left[-6xy + 3a\sqrt{3}x - \sqrt{3}ax\right] = \frac{1}{\sqrt{3}a}\left[-6xy + 2a\sqrt{3}\,x\right]$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}a}\left[-3xy^2 + 2a\sqrt{3}\,xy\right] + h(x) \quad (2)$$

con (1) y (2):

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}a}\left[x^3 - 3xy^2 + 2\sqrt{3}a\,x\cdot y\right]}$$

Con los valores del enunciado $a = 0'20$ m

$$\boxed{f(x,y) = 2'887\cdot x^3 - 8'66\,xy^2 + 2xy}$$

NOTA: Torsión en sección triangular según Prandtl y Saint-Venant.

Enunciado: **EXAMEN DE MAYO DE 1997** (50') Torsión8

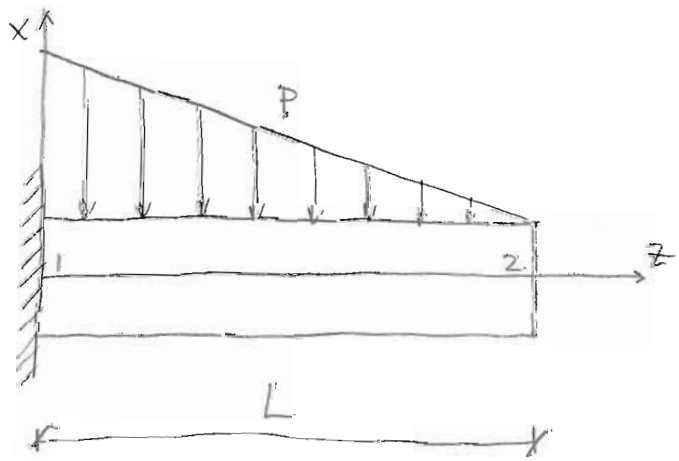
La viga de la figura, de sección cuadrada de lado $a = 0'83$ m y luz $L = 8'30$ m se encuentra sometida a una carga distribuida triangular de intensidad máxima $p_0 = 36$ KN/m. El extremo 1 de la viga está empotrado y el 2 es libre. Se pide, utilizando un sólo término en el cálculo aproximado que se elija, obtener lo siguiente:

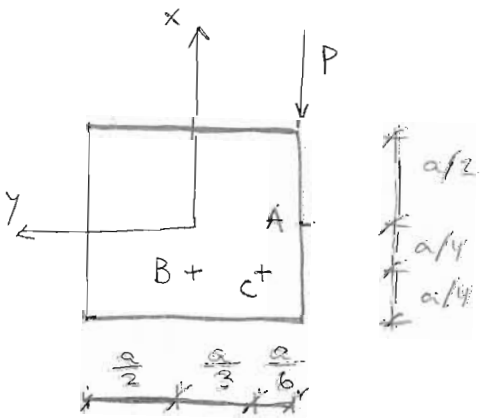
1) Inercia a torsión de la sección cuadrada, en m^4.

2) Máxima tensión principal de tracción en KN/m^2 y los ángulos en grados sexagesimales que forma con los ejes de coordenadas positivos x, y, z en la fibra A de la sección del empotramiento

3) Lo mismo que el apartado anterior para la fibra B de la sección del empotramiento.

4) En los cálculos anteriores se supondrá que la influencia del alabeo es despreciable. Con objeto de conocer su importancia, se desea obtener la expresión de la función de alabeo y, en particular, el desplazamiento (en metros) del punto C producido por un momento torsor de 10 KN·m actuando sobre la sección. Para ello, se conoce que el módulo de elasticidad es $E = 2 \cdot 10^7$ KN/m^2 y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0'20$ m.

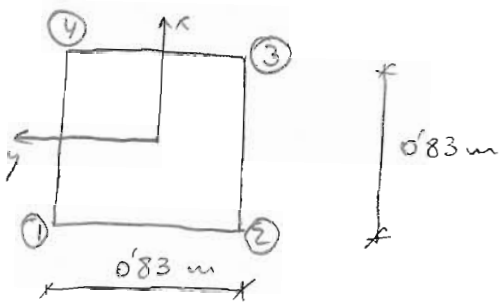




Resolución:

1) Inercia a torsión. Utilizando la función de Prandtl se tiene.

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = cte = -2G\alpha \\ \phi_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$



En el contorno lateral se tiene:

- LADO 1-2 : $x = -0'415$ m
- LADO 2-3 : $y = -0'415$ m
- LADO 3-4 : $x = 0'415$ m
- LADO 4-1 : $y = 0'415$ m

$$\phi = A(x+0'415)(y+0'415)(x-0'415)(y-0'415)$$

$$\phi = A(x^2 - 0'172225)(y^2 - 0'172225) = Ax^2y^2 - 0'172225 \cdot Ax^2 - 0'172225 \cdot Ay^2 + 0'02966A$$

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\phi = -2G\alpha$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2Axy^2 - 0'34445 \cdot A \cdot x \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2Ay^2 - 0'34445 \cdot A$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2Ax^2y - 0'34445 \cdot A \cdot y \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Ax^2 - 0'34445 \cdot A$$

Por tanto:

$$\nabla^2 \phi = 2Ax^2 + 2Ay^2 - 0'6889 \cdot A \neq cte$$

Al no cumplir esta condición se sabe que no es función exacta, pero se puede minimizar el error usando Rayleigh-Ritz.

$$\begin{cases} V = U - W \\ U = \dfrac{1}{2G} \displaystyle\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega \\ W = 2 \cdot \alpha \displaystyle\iint_{\Omega} \phi \cdot d\Omega \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2G}\iint_{\Omega}\left[\left(2Axy^2 - 0'34445\cdot A\cdot x\right)^2 + \left(2Ax^2y - 0'34445\cdot A\cdot y\right)^2\right]d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2G}\iint_{\Omega} A^2\left[\left(4x^2y^4 + 0'1186\cdot x^2 - 1'378\,x^2y^2 + 4x^4y^2 + 0'1186\cdot y^2 - 1'378\,x^2y^2\right)\right]d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2G}\iint_{\Omega} A^2\left[4x^2y^4 + 4x^4y^2 + 0'1186x^2 + 0'1186\,y^2 - 2'756\,x^2y^2\right]d\Omega =$$

$$= \frac{A^2}{2G}\int_{-0'415}^{0'415}\int_{-0'415}^{0'415}\left(4x^2y^4 + 4x^4y^2 + 0'1186\,x^2 + 0'1186\,y^2 - 2'756\,x^2y^2\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{A^2}{2G}\int_{-0'415}^{0'415}\left[0'8\,x^2y^5 + \frac{4}{3}x^4y^3 + 0'1186\,x^2y + 3'953\cdot 10^{-2}y^3 - 0'919\cdot x^2y^3\right]\Bigg|_{-0'415}^{0'415}dx =$$

$$= \frac{A^2}{2G}\int_{-0'415}^{0'415}\Big[\left(0'00985\,x^2 + 0'0953\cdot x^4 + 0'049\,x^2 + 0'00283 - 0'066\cdot x^2\right) -$$

$$-\left(-0'00985x^2 - 0'0953\cdot x^4 - 0'049\,x^2 - 0'00283 + 0'066\,x^2\right)\Big]dx =$$

$$= \frac{A^2}{2G}\int_{-0'415}^{0'415}\left(0'0197\,x^2 + 0'1906\,x^4 + 0'098\,x^2 + 0'00566 - 0'132\,x^2\right)dx =$$

$$= \frac{A^2}{2G}\left[0'00657\cdot x^3 + 0'03812\,x^5 + 0'03267\,x^3 + 0'00566\cdot x - 0'044\,x^3\right]\Bigg|_{-0'415}^{0'415} =$$

$$= \frac{A^2}{2G}\left[0'002478 + 0'002478\right] = \frac{0'002478\,A^2}{G}$$

Como $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \dfrac{2\cdot 10^7}{2(1+0'2)} = 8333333\ KN/m^2$, se tiene:

$$U = 2'9736\cdot 10^{-10}\cdot A^2$$

$$W = 2\cdot\alpha\iint_{\Omega}\phi\,d\Omega = A\cdot 2\cdot\alpha\cdot\int_{-0'415}^{0'415}\int_{0'415}^{0'415}\left(x^2y^2 - 0'172\cdot x^2 - 0'172\,y^2 + 0'0297\right)dx\,dy =$$

$$= 2\cdot A\cdot\alpha\cdot\int_{-0'415}^{0'415}\left(\frac{x^2y^3}{3} - 0'172x^2y - 0'05741\cdot y^3 + 0'0297\cdot y\right)\Bigg|_{-0'415}^{0'415}dx =$$

$$= 2A\alpha\int_{-0'415}^{0'415}\left(-0'0951\cdot x^2 + 0'01644\right)dx = 2\cdot A\,\alpha\left(-0'0317x^3 + 0'01644x\right)\Bigg|_{-0'415}^{0'415}$$

$$W = 0'01823\cdot A\cdot\alpha$$

Entonces:

$$V = U - W = 2'9736 \cdot 10^{-10} A^2 - 0'01823 \cdot A \cdot \alpha$$

Minimizando la energía potencial total:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = 0 \rightarrow 5'9472 \cdot 10^{-10} A - 0'01823 \cdot \alpha = 0$$

$$A = 3'065 \cdot 10^{7} \alpha$$

$$M_T = 2 \iint_{\Omega} \phi \, d\Omega = G \cdot J \cdot \alpha$$

$$0'01823 \cdot A = G \cdot J \cdot \alpha$$

$$558806 \cdot \alpha = 8'333 \cdot 10^{6} \cdot J \cdot \alpha$$

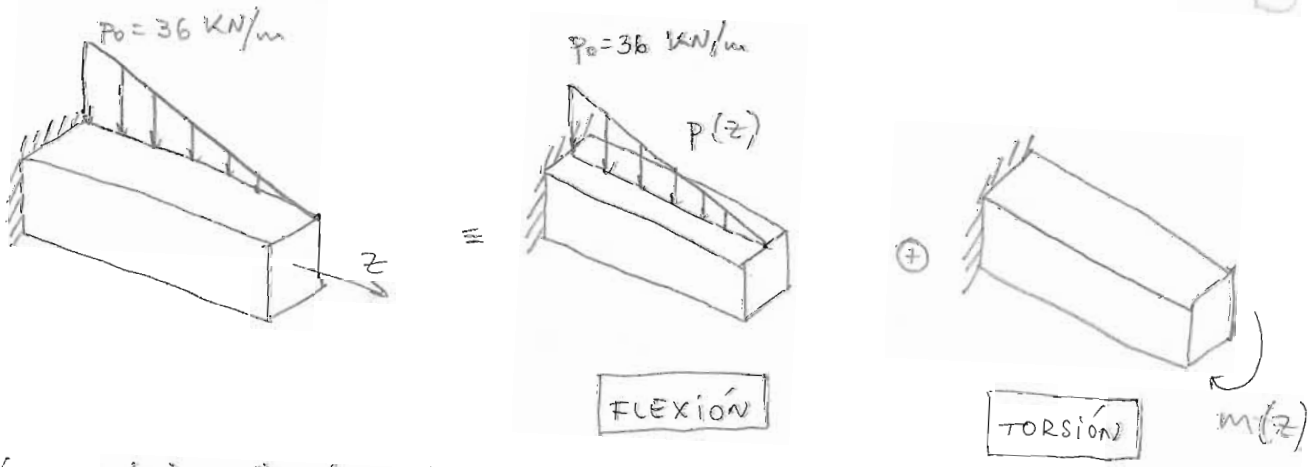
De donde: $\boxed{J = 6'706 \cdot 10^{-2} \, m^4}$

Se puede comprobar este valor con la fórmula aproximada:

$$J = \frac{(\text{Area})^4}{4 \cdot \pi^2 \cdot I_{polar}} = \frac{0'83^8}{4 \cdot \pi^2 \cdot 2 \left(\frac{1}{12} 0'83^4\right)} = 7'21 \cdot 10^{-2} \, m^4$$

y el valor exacto será: $J = \frac{1}{6} 0'83^4 = 7'91 \cdot 10^{-2} \, m^4$

2) Máxima tensión principal de tracción en A. Los esfuerzos de la viga son:



FLEXIÓN: $p(z) = \frac{p_0}{L}(L - z) = 36 - 4'337 \cdot z$

TORSIÓN: $m(z) = p(z) \cdot \frac{a}{2} = \frac{p_0 \cdot a}{2 \cdot L}(L - z) = 14'94 - 1'8 \cdot z$

Por lo tanto, las leyes de esfuerzos en el empotramiento son:

$$M_f = \frac{-1}{2} p_0 \cdot L \cdot \frac{1}{3} L = \frac{-p_0 L^2}{6} = -413'34 \ m \cdot KN = M_y$$

$$Q = -\frac{1}{2} p_0 \cdot L = -149'4 \ KN = Q_x$$

$$M_T = \frac{-1}{2} 14'94 \cdot L = -62 \ KN \cdot m = M_z$$

Las tensiones, serán:

FLEXIÓN:

$$\sigma_z^F(x) = \frac{-M_y \cdot x}{I_y} = \frac{413'34 \cdot x}{3'955 \cdot 10^{-2}} = 10451 \cdot x \quad \left(\frac{KN}{m^2}\right)$$

$$\tau_{xz}^F = \frac{Q_x \cdot S}{I_y \cdot b} = \frac{-149'4 \cdot (0'0861125 - 0'5 x^2)}{3'955 \cdot 10^{-2}} = -325'3 + 1889 x^2 \left(\frac{KN}{m^2}\right)$$

TORSIÓN:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz}^T = \frac{\partial \phi}{\partial y} = A\left[2x^2 y - 0'34445 \cdot y\right] = \alpha \cdot \left[6'13 \cdot 10^7 x^2 y - 1'056 \cdot 10^7 \cdot y\right]$$

$$\tau_{yz}^T = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = A\left[-2xy^2 + 0'34445 \cdot x\right] = \alpha \cdot \left[-6'13 \cdot 10^7 x y^2 + 1'056 \cdot 10^7 x\right]$$

Como $\alpha = \frac{M_z}{GJ} = -1'1095 \cdot 10^{-4}$ rad/m

$$\tau_{xz}^T = -6801 \cdot x^2 \cdot y + 1172 \cdot y \quad (KN/m^2)$$

$$\tau_{yz}^T = 6801 \cdot x \cdot y^2 - 1172 \cdot x \quad (KN/m^2)$$

En el punto $(x = 0, \ y = -0'415 \ m)$

$$\sigma_z^F = 0 \ KN/m^2$$

$$\tau_{xz}^F = -325'3 \ KN/m^2$$

$$\tau_{xz}^T = -486'4 \ KN/m^2$$

$$\tau_{yz}^T = 0 \ KN/m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{T}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -811'7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -811'7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{K}{m}}$$

Y las tensiones y direcciones principales serán:

$$\left|\begin{array}{lll} \sigma_1 = 811'7 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \bar{e}_1 = \langle 0'707, 0, -0'707 \rangle^T \\ \sigma_2 = 0 & \longrightarrow & \bar{e}_2 = \langle 0, 1, 0 \rangle^T \\ \sigma_3 = -811'7 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \bar{e}_3 = \langle 0'707, 0, 0'707 \rangle^T \end{array}\right.$$

Por lo tanto, $\boxed{\sigma_1 = 811'7 \ KN/m^2}$ y forma 45° con OX, 90° con OY y 135° con OZ.

3) En el punto B (-0'2075, 0)

$$\sigma_z^F = -2168'6 \ KN/m^2$$
$$\tau_{xz}^F = -244 \ KN/m^2$$
$$\tau_{xz}^T = 0$$
$$\tau_{yz}^T = 244 \ KN/m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{T}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -244 \\ 0 & 0 & 244 \\ -244 & 244 & -2168'6 \end{pmatrix} \frac{KN}{m^2}}$$

Las tensiones y direcciones principales serán:

$$\left|\begin{array}{lll} \sigma_1 = 53'6 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \bar{e}_1 = \langle 0'699, -0'699, -0'154 \rangle^T \\ \sigma_2 = 0 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \bar{e}_2 = \langle 0'168, 0'168, 0'971 \rangle^T \\ \sigma_3 = -2222'2 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \bar{e}_3 = \langle 0'109, -0'109, 0'988 \rangle^T \end{array}\right.$$

Por lo tanto, $\boxed{\sigma_1 = 53'6 \ KN/m^2}$ y forma 45'65° con OX, 134'35° con OY y 98'86° con OZ.

4) Función de alabeo. ψ debe cumplir:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad (I)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)\frac{dy}{ds} + \left(\frac{-\partial \psi}{\partial y} - x\right)\frac{dx}{ds} = 0 \qquad (II)$$

$$J = \iint_\Omega \left[x \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - y\frac{\partial \psi}{\partial x} + x^2 + y^2\right] dx\, dy \qquad (III)$$

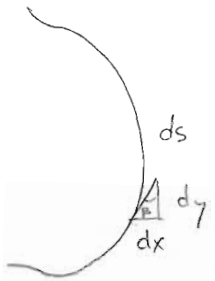
Hay que tantear una función ψ.

$$\psi = B \cdot (x^3 \cdot y - x y^3)$$ (me la saco de la manga)

(I) $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$6xyB - 6xyB = 0 \quad \checkmark$$

(II) $$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)\frac{dy}{ds} + \left(\frac{-\partial \psi}{\partial y} - x\right)\frac{dx}{ds} = 0$$



$$\frac{dy}{ds} = \cos\beta$$

$$\frac{dx}{ds} = \operatorname{sen}\beta$$

$$\left(B \cdot 3x^2 y - B y^3 - y\right)\cos\beta + \left(-B x^3 + B x 3 y^2 - x\right)\operatorname{sen}\beta = 0$$

• LADO 1-2 : $\left| \begin{array}{l} \beta = 180^\circ \\ x = -0'415 \text{ m} \end{array} \right. \rightarrow -3Bx^2 y + By^3 + y = 0$

$$-0'516675 \cdot B + By^2 + 1 = 0$$

$$B = \frac{1}{-y^2 + 0'516675}$$

• LADO 2-3 : $\left| \begin{array}{l} \beta = 270^\circ \\ y = -0'415 \text{ m} \end{array} \right| \rightarrow Bx^3 - Bx3y^2 + x = 0$

$$Bx^2 - 0'516675 \cdot B + 1 = 0$$

$$B = \frac{1}{-x^2 + 0'516675}$$

• LADO 3-4 : $\left| \begin{array}{l} \beta = 0^\circ \\ x = 0'415 \text{ m} \end{array} \right| \rightarrow B \cdot 3x^2 y - By^3 - y = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{-y^2 + 0'516675}$

• LADO 4-1 : $\left| \begin{array}{l} \beta = 90^\circ \\ y = 0'415 \text{ m} \end{array} \right| \rightarrow B = \frac{1}{-x^2 + 0'516675}$

No se cumple esta condición, ya que es diferente la expresión en los casos anteriores.

(III): $$J = \iint_{\Omega} \left[x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right] dx\, dy$$

$$J = \int_{-0'415}^{0'415} \int_{-0'415}^{0'415} \left[x \cdot B \cdot (x^3 - 3xy^2) - y B (3x^2 y - y^3) + x^2 + y^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \int_{-0'415}^{0'415} \int_{-0'415}^{0'415} \left[B x^4 - 6 \cdot B x^2 y^2 + B y^4 + x^2 + y^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \int_{-0'415}^{0'415} \left[B x^4 y - 2 B x^2 y^3 + 0'2 B y^5 + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right] \Bigg|_{-0'415}^{0'415} dx =$$

$$= \int_{-0'415}^{0'415} \left[0'83 \cdot B \cdot x^4 - 0'2859 \cdot B \cdot x^2 + 0'00492 \cdot B + 0'83 x^2 + 0'04765 \right] dx =$$

$$= \left[0'166 B x^5 - 0'0953 \cdot B \cdot x^3 + 0'00492 B x + 0'2767 \cdot x^3 + 0'04765 \cdot x \right] \Bigg|_{-0'415}^{0'415} =$$

$$= -0'0054525 \cdot B + 0'0791 = 6'706 \cdot 10^{-2}\ m^4$$

$$B = 2'2082$$

Por lo tanto: $\boxed{\psi = 2'2082 (x^3 \cdot y - x y^3)}$

En el punto $C: (x = -0'2075,\ y = -0'2767,\ z)$ se tiene:

$$\left| \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ w = \alpha \cdot \psi(x) = \dfrac{M_z}{G \cdot J} \psi(x) = \dfrac{10}{8333333 \cdot 6'706 \cdot 10^{-2}} \cdot 2'2082 (x^3 \cdot y - x y^3) = \end{array} \right.$$

$$= 3'9514 \cdot 10^{-5} (x^3 \cdot y - x y^3) = \boxed{-7'602 \cdot 10^{-8}\ m}$$

NOTA: Problema de torsión por Rayleigh-Ritz

Torsión 9.

Dado el siguiente campo de movimientos en un sólido (en metros):

$u = -z.y.10^{-4}$ $\qquad$ $v = z.x.10^{-4}$ $\qquad$ $w = -0.8.x.y.10^{-4}$

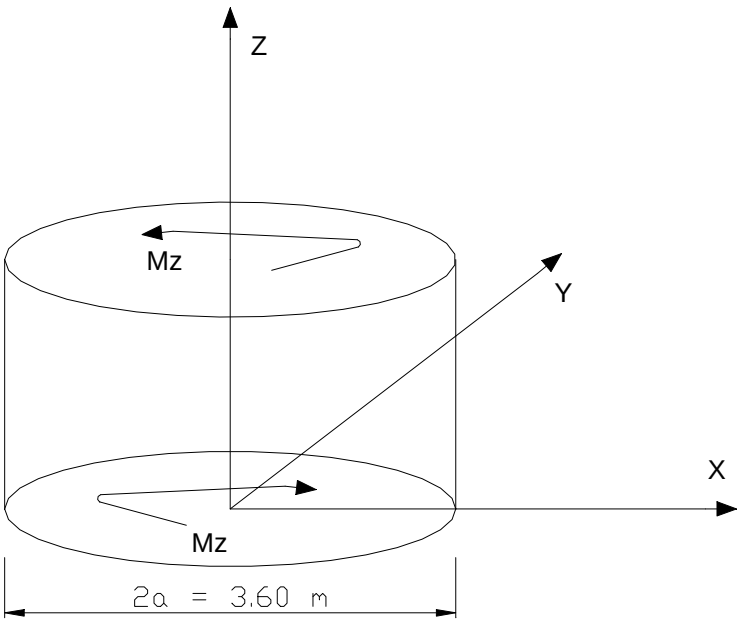
Se pide:

1. Demostrar que es posible (se ha de indicar con precisión qué ecuaciones cumple que lo hacen posible).

2. Obtener el campo de tensiones (en kN/m²) que sufre el sólido mencionado. Las características elásticas del material son G = 125 MPa y coeficiente de Poisson ν = 0.20.

3. Probar que el campo de tensiones obtenido es solución del problema elástico de la figura (cilindro de base elíptica y semieje mayor a = 1.8 m sometido a torsión). Enumerar con claridad qué condiciones, adicionales a las del apartado 1, se deben cumplir. Obtener los valores numéricos del semieje b de la elipse y del momento torsor que actúa sobre sus caras extremas, indicando de qué condición se obtiene cada uno.

(Examen de mayo de 2001)



Enunciado:

EXAMEN DE MAYO DE 2001

Torsión 9

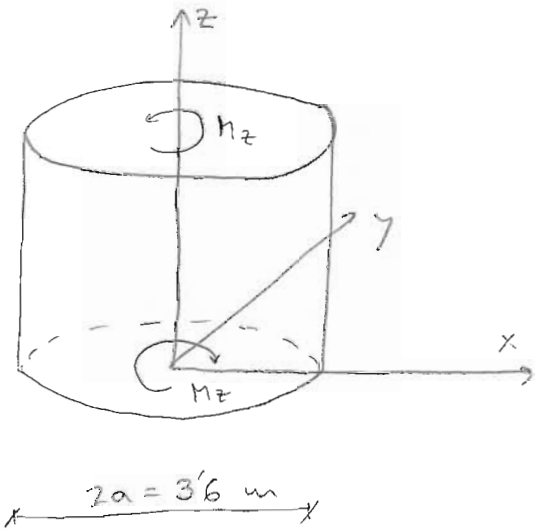
Dado el siguiente campo de movimientos en un sólido (en m):

$$u = -z \cdot y \cdot 10^{-4} \qquad v = z \cdot x \cdot 10^{-4} \qquad w = -0'8 \cdot x \cdot y \cdot 10^{-4}$$

1) Demostrar que es posible (se ha de indicar con precisión qué ecuaciones cumple que lo hacen posible).

2) Obtener el campo de tensiones (en KN/m^2) que sufre el sólido mencionado. Las características elásticas del material son $G = 125$ MPa y $\nu = 0'20$.

3) Probar que el campo de tensiones obtenido es solución del problema elástico de la figura (cilindro de base elíptica y semieje mayor $a = 1'8$ m sometido a torsión). Enumerar con claridad qué condiciones, adicionales a las del apartado 1, se deben cumplir. Obtener los valores numéricos del semieje b de la elipse y del momento torsor que actúa sobre sus caras extremas, indicando de qué condición se obtiene cada uno.



Resolución:

1) $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0'2 \cdot x \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -1'8 \cdot y \cdot 10^{-4}$$

Por lo tanto (aplicando Lamé) se tiene:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = -22'5 \cdot y \qquad \left(\text{en } \frac{KN}{m^2}\right)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = 2'5 \cdot x \qquad \left(\text{en } \frac{KN}{m^2}\right)$$

Hay que comprobar las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad \checkmark$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones se cumplen automáticamente, por proceder de un campo de movimientos.

2)

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ &\tau_{xz} = -22'5 \cdot y \\ &\tau_{yz} = 2'5 \cdot x \end{aligned}} \qquad \text{en } (KN/m^2)$$

3) Se han de cumplir las condiciones de contorno.

$$\left| \begin{aligned} u &= -\alpha \cdot z \cdot y \\ v &= \alpha \cdot z \cdot x \\ w &= \alpha \cdot \varphi(x,y) \end{aligned} \right. \qquad \text{De donde: } \left| \begin{aligned} &\alpha = 10^{-4} \\ &\varphi(x,y) = -0'8 \cdot x \cdot y \end{aligned} \right.$$

Las condiciones de contorno de las tapas se cumplen automáticamente

$$N_z = \iint_\Omega \sigma_z \, d\Omega = 0$$

$$Q_x = \iint_\Omega \tau_{zx} \, d\Omega = 0 \qquad M_t = \iint_\Omega \left(-\tau_{zx} \cdot y + \tau_{zy} \cdot x\right) d\Omega$$

$$Q_y = \iint_\Omega \tau_{zy} \, d\Omega = 0$$

La función de tensiones de Prandtl es:

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{xz} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -22'5 \cdot y \rightarrow \phi = -11'25 \cdot y^2 + g(x) + c_1 \\ \tau_{yz} = \dfrac{-\partial \phi}{\partial x} = 2'5 \cdot x \rightarrow \phi = -1'25 \cdot x^2 + h(y) + c_2 \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$\phi = -1'25 \cdot x^2 - 11'25 \cdot y^2 + K$$

Aplicando la primera condición de contorno: $\left| \begin{array}{l} \phi_\Gamma = 0 \\ \Gamma: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{array} \right.$

$$\phi(x,y) = A\left(\frac{x^2}{3'24} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = -1'25\, x^2 - 11'25\, y^2 + K$$

$$\frac{A}{3'24} = -1'25 \rightarrow A = -4'05$$

$$\frac{A}{b^2} = -11'25 \rightarrow \boxed{b = 0'6 \text{ m}}$$

$$-A = K \rightarrow K = 4'05$$

Por tanto:

$$\phi(x,y) = -1'25\, x^2 - 11'25 \cdot y^2 + 4'05$$

La segunda condición es:

$$M_T = 2 \iint_\Omega \phi \, dx\, dy = 2 \int_{-0'6}^{0'6} \int_{-1'8\sqrt{1-\frac{y^2}{0'36}}}^{1'8\sqrt{1-\frac{y^2}{0'36}}} \left(-1'25\, x^2 - 11'25\, y^2 + 4'05\right) dy\, dx =$$

$$= 2 \int_{-0'6}^{0'6} \left(-0'4167\, x^3 - 11'25\, y^2 x + 4'05\, x\right) \Bigg|_{-1'8\sqrt{1-\frac{y^2}{0'36}}}^{1'8 \cdot \sqrt{1-\frac{y^2}{0'36}}} dy$$

Hacemos el cambio: $y = 0'6 \operatorname{sen} \theta \rightarrow dy = 0'6 \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

$$1'8\sqrt{1-\frac{y^2}{0'36}} = 1'8\sqrt{1 - \frac{0'36 \operatorname{sen}^2\theta}{0'36}} = 1'8 \cdot \cos\theta$$

si $y = -0'6 \rightarrow \theta = -\pi/2$

$y = 0'6 \rightarrow \theta = \pi/2$

$$M_T = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left[-0'4167\, x^3 - 4'05\, \text{sen}^2\theta \cdot x + 4'05\, x\right]\Bigg|_{-1'8\cos\theta}^{1'8\cos\theta} 0'6 \cdot \cos\theta \cdot d\theta =$$

$$= 1'2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-4'86 \cdot \cos^4\theta - 14'58\, \text{sen}^2\theta \cos^2\theta + 14'58 \cos^2\theta\right] d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-5'832 \cdot \cos^4\theta - 17'496\, \text{sen}^2\theta \cos^2\theta + 17'496 \cos^2\theta\right] d\theta$$

$$\boxed{M_T = 13'741 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Sabíamos tambien que:

$$M_z = G \cdot J \cdot \alpha$$

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = 1'09931 \text{ m}^4$$

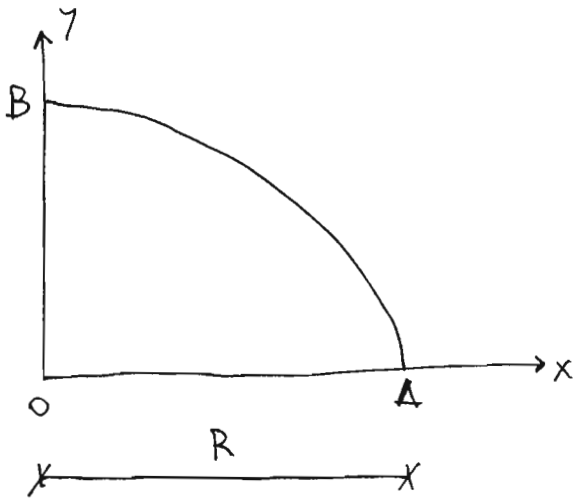
$$\boxed{M_z = 125000 \cdot 1'09931 \cdot 10^{-4} = 13'741 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

NOTA: Problema de torsión

Enunciado: (Extraído de BREVELAS) Torsión 10 EX FEB 92

La sección transversal de una barra prismática está constituid por el cuadrante del círculo de la figura. Para determinar la constante de torsión J se elige la siguiente función como una aproximación de la de Prandtl: $\phi = a_0 \cdot x \cdot y \left(x^2+y^2-R^2\right)$ en la que a_0 es una constante a determinar y R es el radio del cuadrante en centímetros. Se pide:

1) Explicar por qué la función ϕ no proporciona la solución exacta del problema.
2) Explicar por qué la función ϕ es adecuada para obtener una solución aproximada utilizando el método de Rayleigh-Ritz.
3) Calcular el valor de la constante a_0 por el método de Rayleigh-Ritz.
4) Calcular el valor de la constante de torsión J a partir del resultado anterior.
5) Comprobar el resultado anterior de J mediante una fórmula aproximada.
6) Para obtener una solución más exacta se utiliza el método de Rayleigh-Ritz, considerando más funciones aproximantes de ϕ, ¿qué funciones emplearía de modo que la función aproximada de Prandtl dada anteriormente fuese la primera de la serie?



Resolución:

1) Si ϕ fuera solución exacta del problema, tendría que cumplir:

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta\phi = -2G\theta & \text{en } \Omega \\ \phi = 0 & \text{en } \Gamma \end{array} \right. \qquad \phi = a_0 \cdot x \cdot y \left(x^2+y^2-R^2\right)$$

$$\Delta\phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\left[a_0 \cdot x \cdot y \cdot \left(x^2+y^2-R^2\right)\right]$$

$$\Delta\phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\left[a_0 x^3 y + a_0 x y^3 - a_0 x \cdot y R^2\right] = 6a_0xy + 6a_0xy$$

$$\Delta\phi = 12 a_0 x y \neq cte \Rightarrow \phi \text{ no es solución exacta}$$

2) Para ver si es adecuada, vamos a ver si cumple las condiciones de contorno:

$\boxed{OA}$ $y = 0 \Rightarrow \phi(x,y) = 0$

$\boxed{OB}$ $x = 0 \Rightarrow \phi(x,y) = 0$

$\boxed{AB}$ $x^2+y^2 = R^2 \Rightarrow \phi(x,y) = 0$

Luego es válida

3) Calcular a_0 por Rayleigh-Ritz

$$U = \frac{1}{2G}\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega$$ (sólido prismático sometido a torsión)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = a_0 \cdot y \cdot \left[3x^2 + y^2 - R^2\right]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = a_0 \cdot x \cdot \left[x^2 + 3y^2 - R^2\right]$$

$$U = \frac{a_0^2}{2G}\iint_\Omega \left[15x^4y^2 + 15x^2y^4 - 12x^2y^2R^2 - 2y^4R^2 - 2x^4R^2 + y^2R^4 + x^2R^4 + x^6 + y^6\right] d\Omega$$

Para resolver esta integral hay que tener en cuenta lo siguiente:

$$I = \iint_\Omega x^{p-1} y^{q-1} \, d\Omega \qquad \Omega_{\text{Dominio}} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta \leq 1 \end{cases}$$ CONTORNO TIPO ELIPSE

$$I = \frac{a^p \cdot b^q}{\alpha \cdot \beta} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left[\frac{q}{b}\right]}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}\right)}$$

función Γ de Euler : $\Gamma(p) \begin{cases} p = n \text{ entero} \rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \\ p \neq \text{entero} \rightarrow \Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1) \end{cases}$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$I(p,q) = I(q,p) \Rightarrow \iint_\Omega x^{p-1} y^{q-1} \, d\Omega = \iint_\Omega x^{q-1} y^{p-1} \, d\Omega$$

Nuestro recinto es:

$$\Omega = \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x^2 + y^2 < R^2 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 < 1 \qquad \left| \begin{array}{l} \alpha = \beta = 2 \\ a = b = R \end{array} \right.$$

$$\iint_\Omega x^4 y^2 \, d\Omega = \frac{R^5 R^3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{R^5 \cdot R^3}{4} \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{4 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= \frac{R^8 \cdot 3 \cdot \pi}{768} = \frac{R^8 \pi}{256}$$

Resolviendo:

$$\boxed{U = \frac{a_0^2}{2G} \frac{\pi R^8}{32} = \frac{a_0^2 \pi R^8}{64 G}}$$

Ahora hay que ver el trabajo de las fuerzas exteriores:

$$W = 2\theta \iint_\Omega \phi(x,y) \, d\Omega$$

$$W = 2\theta \iint_\Omega a_0 x y \left(x^2 + y^2 - R^2\right) d\Omega = 2\theta a_0 \frac{R^6}{24}$$

Y entonces:

$$\Pi = U - W = \frac{a_0^2 \pi R^8}{64\, G} - 2\theta a_0 \frac{R^6}{24}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \frac{a_0 \pi R^8}{32\, G} - \frac{\theta R^6}{12} = 0$$

$$\boxed{a_0 = \frac{\theta R^6\, 32\, G}{12 \cdot \pi R^8} = \frac{8\theta G}{3\ \pi R^2}}$$

4) Calcular J

$$M_T = 2 \iint_\Omega \phi(x,y)\, d\Omega$$

$$M_T = 2 \iint_\Omega \left[a_0 x y \left(x^2 + y^2 - R^2\right)\right] d\Omega = 2 a_0 \frac{R^6}{24} = \frac{a_0 R^6}{12}$$

$$a_0 = \frac{12 M_T}{R^6} = \frac{8\theta G}{3 \pi R^2} \Rightarrow \boxed{J = \frac{M_T}{G\theta} = \frac{8 R^6}{12 \cdot 3 \cdot \pi R^2} = \frac{2 R^4}{9\pi}}$$

5)

$$J_{APROX} = \frac{A^2}{4\pi^2 I_{POLAR}} = \frac{\pi^2 R^4}{16 \pi^2 4 \frac{\pi R^4}{2}} = \frac{1}{32\pi}$$

6) Solución más exacta.

$$\phi(x,y) = \underbrace{\phi_0(x,y)}_{\text{cumple } \phi_0 = 0 \text{ en } \Gamma} \cdot \left[a_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots\right]$$

El resto de las funciones puede ser de cualquier tipo.

NOTA: Problema de torsión con Rayleigh - Ritz

Torsión 11.

La viga de la figura de sección un triángulo equilátero de lado a = 2 m y luz L = 20 m se encuentra sometida a dos cargas puntuales excéntricas de valor P = 60 kN, aplicadas en la sección centro de luz. Los extremos 1 y 2 de la viga están empotrados, pero sin coaccionar el alabeo de la sección. Se pide:

1. Comprobar que la función $f(x,y) = 1/(a\sqrt{3})\cdot(3\,x\,y^2 - x^3)$ es la función de Saint-Venant correspondiente a la torsión de la sección de la viga.

2. Determinar la inercia a torsión J de la sección definida expresada en m^4 a partir de la función anterior o mediante fórmula aproximada.

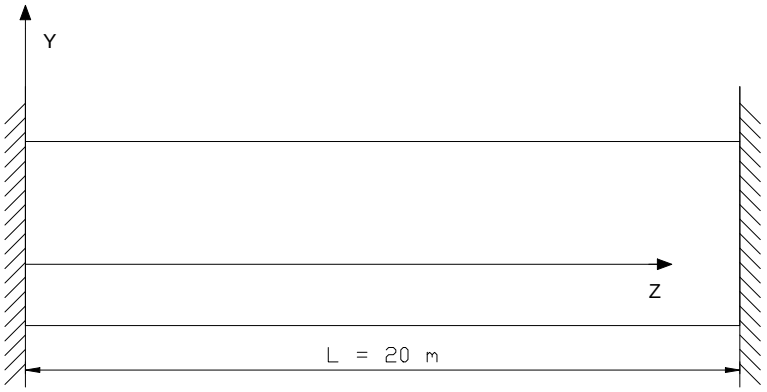
3. Obtener el tensor de tensiones en kN/m² en el punto de coordenadas x = 0; $y = a\cdot\sqrt{3}/6$; z = L.

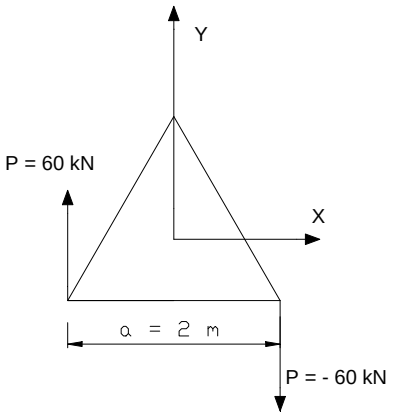
4. Máxima tensión principal de tracción en kN/m² y los ángulos en grados sexagesimales que forma con los ejes de coordenadas positivos x, y, z en el punto del apartado anterior.

5. Comentar la validez de la fórmula de Resistencia de Materiales para el cálculo de las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo cortante, al aplicarlas a las fibras situadas a lo largo de la recta $y = a\cdot\sqrt{3}/6$; z = L.

Todas las tensiones de flexión (las debidas al momento flector y al esfuerzo cortante) se calcularán en los apartados anteriores de acuerdo con las fórmulas elementales de Resistencia de Materiales.

(Examen de diciembre de 1997)





Enunciado: Torsión II

EXAMEN DICIEMBRE 1997

La viga de la figura de luz $L = 20\,m$, sección transversal un triángulo equilátero de lado $a = 2\,m$, se encuentra sometida a dos cargas puntuales excéntricas $P = 60\,KN$ aplicadas en la sección centro de luz. Los extremos de la viga están empotrados, pero sin coaccionar el alabeo de la sección. Las tensiones de flexión se calcularán mediante las fórmulas elementales de la Resistencia de Materiales. Se pide:

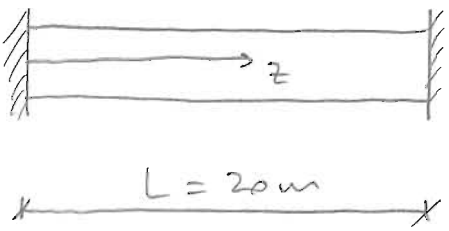
1) Comprobar que la función $f(x,y) = \frac{1}{a\sqrt{3}}\left(3xy^2 - x^3\right)$ es la función de Saint Venant correspondiente a la torsión de la sección de la viga.

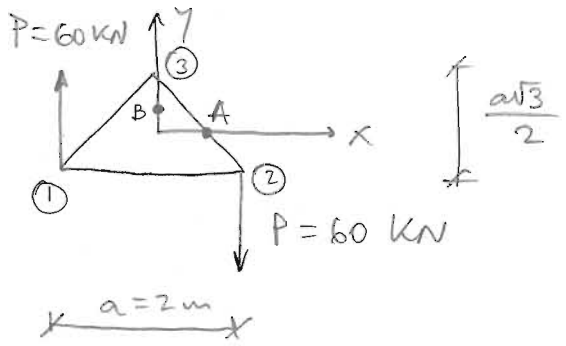
2) Determinar la inercia a torsión J de la sección triangular, expresada en m^4, bien a partir de la función anterior o bien mediante fórmula aproximada.

3) Obtener el tensor de tensiones en KN/m^2 en el punto B de coordenadas $\left(x=0,\ y=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ z=L\right)$.

4) Máxima tensión principal de tracción en KN/m^2 y los ángulos en grados sexagesimales que forma con los ejes de coordenadas positivos x, y, z en el punto B anterior.

5) Comentar la validez de la fórmula de Resistencia de Materiales para el cálculo de las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo cortante al aplicarlas en las fibras situadas a lo largo de la recta $y = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $z = L$





Resolución:

1) Para que f sea la función de Saint Venant debe cumplir:

- f biarmónica: $\nabla^2 f = 0$
- Tensiones nulas en el contorno lateral

La primer condición es:

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\frac{1}{a\sqrt{3}}\left(3xy^2 - x^3\right)\right] = \frac{1}{a\sqrt{3}}\left(-6x + 6x\right) = 0 \quad \checkmark$$

Para ver las tensiones en los contornos, se deben obtener las expresiones de las tensiones, y particularizar en cada cara.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G\cdot\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] = G\cdot\alpha\cdot\left(\frac{3y^2}{a\sqrt{3}} - \frac{3x^2}{a\sqrt{3}} - y\right)$$

$$\tau_{yz} = G\cdot\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] = G\cdot\alpha\cdot\left(\frac{6xy}{a\sqrt{3}} + x\right)$$

CARA ①-②: $y = \frac{-a\sqrt{3}}{6}$ $\qquad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Aplicando Cauchy: $\bar{t} = \underline{T}\cdot\bar{n}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 0 = 0 \ \checkmark \\ \rightarrow 0 = 0 \\ \rightarrow 0 = -\tau_{yz} \end{array}$$

$$\tau_{yz} = G\cdot\alpha\cdot\left(\frac{6\cdot x\,\frac{-a\sqrt{3}}{6}}{a\sqrt{3}} + x\right) = 0 \quad \checkmark$$

CARA ②-③: $y = -\sqrt{3}x + \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \bar{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 0 = 0 \ \checkmark \\ \rightarrow 0 = 0 \ \checkmark \\ \rightarrow \tau_{xz}\frac{\sqrt{3}}{2} + \tau_{yz}\frac{1}{2} = 0 \end{array}$$

$$\sqrt{3}\cdot G\cdot\alpha\left(\frac{3}{a\sqrt{3}}\left[3x^2 + \frac{a^2}{3} - 2ax\right] - \frac{3x^2}{a\sqrt{3}} + \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) +$$

$$+ G\cdot\alpha\cdot\left(\frac{6}{a\sqrt{3}}x\cdot\left(-\sqrt{3}x + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) + x\right) = \frac{9x^2}{a} + a - 6x - \frac{3x^2}{a} + 3x - a - \frac{6x^2}{a} + 2x + x = 0$$

CARA ①-③: $y = \sqrt{3}x + \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow 0=0 \checkmark \\ \longrightarrow 0=0 \checkmark \\ \longrightarrow -\tau_{xz}\cdot\sqrt{3} + \tau_{yz} = 0 \end{matrix}$$

$$-\sqrt{3}\cdot G\cdot\alpha\left(\frac{3}{a\sqrt{3}}\left[3x^2+\frac{a^2}{3}+2ax\right]-\frac{3x^2}{a\sqrt{3}}-\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)+$$

$$+G\cdot\alpha\cdot\left(\frac{6x}{a\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}x+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right]+x\right)=\frac{-9x^2}{a}-a-6x+\frac{3x^2}{a}+3x+a+\frac{6x^2}{a}+2x+x=0 \checkmark$$

Luego $f(x,y)$ es la Función de Saint Venant correspondiente a la torsión de la viga.

2) Inercia a torsión A partir de f:

$$J=\iint_\Omega\left[x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}+x^2+y^2\right]d\Omega =$$

$$=\int_{-\frac{a\sqrt{3}}{6}}^{\frac{a\sqrt{3}}{3}}\int_{\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{a}{3}}^{-\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{a}{3}}\left[\frac{2\sqrt{3}x^2y}{a}-\frac{\sqrt{3}}{a}y\left(y^2-x^2\right)+x^2+y^2\right]dx\,dy$$

Resolviendo: $\boxed{J=\frac{\sqrt{3}\cdot a^4}{80}=0'3464\ m^4}$

Una fórmula para determinar de forma aproximada la inercia a torsión es:

$$\boxed{J_{APROX}=\frac{(\text{Área})^4}{4\cdot\pi^2\cdot I_{POLAR}}}$$

$$\text{Área}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\longrightarrow(\text{Área})^4=\frac{9a^8}{256}$$

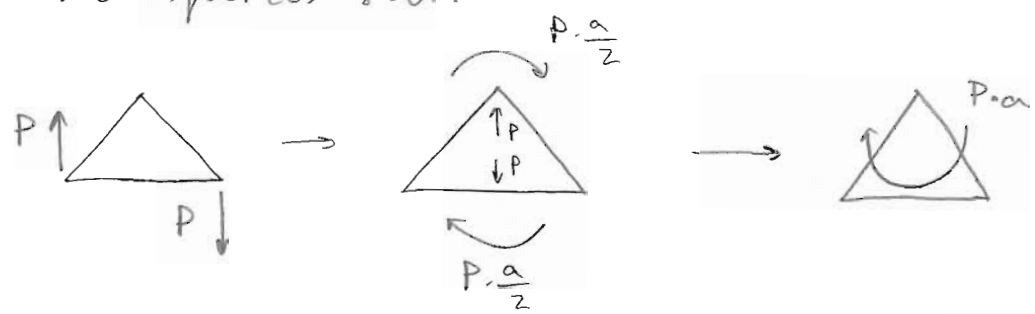
$$I_{POLAR}=I_x+I_y=\frac{1}{36}ah^3+\frac{1}{48}ha^3=\frac{\sqrt{3}a^4}{48}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{J_{APROX}=\frac{\frac{9a^8}{256}}{4\pi^2\cdot\frac{\sqrt{3}a^4}{48}}=\frac{432\,a^4}{1024\sqrt{3}\cdot\pi^2}=2'4679\cdot10^{-2}a^4=0'395\ m^4}$$

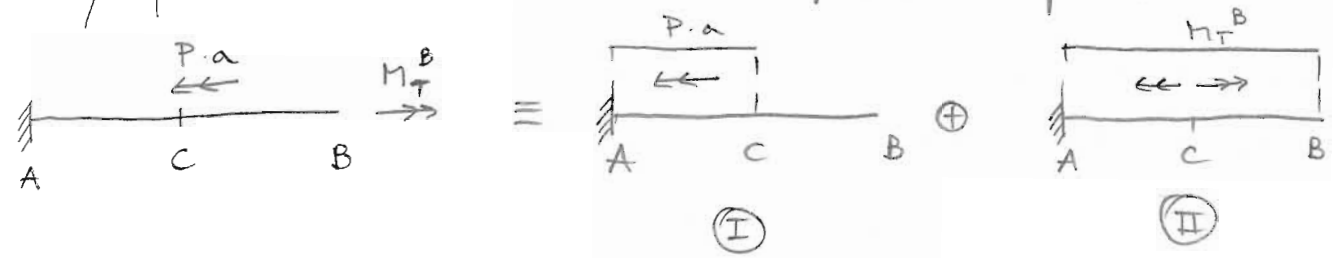
3) Tensor de tensiones en B $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 20\right)$

Los esfuerzos son:



No hay flexión

Hay que hacer el cálculo de esfuerzos hiperestáticos



Hay que imponer $\vec{\omega}_B = 0 = \vec{\omega}_B^{\,I} + \vec{\omega}_B^{\,II}$

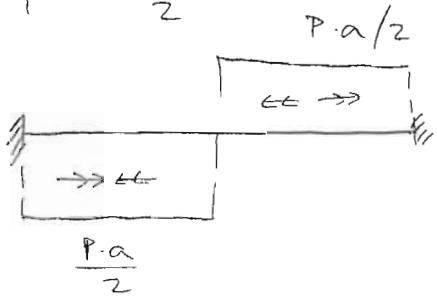
$$\vec{\omega}_B^{\,I} = \cancel{\vec{\omega}_A^{\,I}}^{\,0} + \frac{1}{GJ}\left[-P\cdot a\cdot\frac{L}{2}\right] = \frac{-P\cdot a\cdot L}{2GJ}$$

$$\vec{\omega}_B^{\,II} = \cancel{\omega_A^{\,II}}^{\,0} + \frac{1}{G\cdot J}\left[M_T^B\cdot L\right] = \frac{M_T^B\cdot L}{G\cdot J}$$

Por lo tanto

$$\frac{-P\cdot a\cdot \cancel{L}}{2\cancel{G}\cancel{J}} + \frac{M_T^B\cdot \cancel{L}}{\cancel{G}\cdot\cancel{J}} = 0 \longrightarrow M_T^B = \frac{P\cdot a}{2}$$

La ley de torsores es:



Y las tensiones son: $(M_T = G\cdot J\cdot\alpha)$

$$\tau_{xz} = G\cdot\alpha\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] = \frac{M_T}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] =$$

$$= \frac{\frac{P\cdot a}{2}}{\frac{\sqrt{3}\,a^4}{80}}\left[\frac{1}{a\sqrt{3}}\left(3y^2 - 3x^2\right) - y\right] = \frac{60\cdot 80}{\sqrt{3}\cdot 16}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{3} - 0\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\right] = -50 \text{ KN/m}^2$$

$$\tau_{yz} = G\cdot\alpha\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] = \frac{M_T}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] =$$

$$= \frac{\frac{P\cdot a}{2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot a^4}{80}}\left[\frac{1}{a\sqrt{3}}\,6xy + x\right] = \frac{60\cdot 80}{\sqrt{3}\cdot 16}\left[0\right] = 0 \quad KN/m^2$$

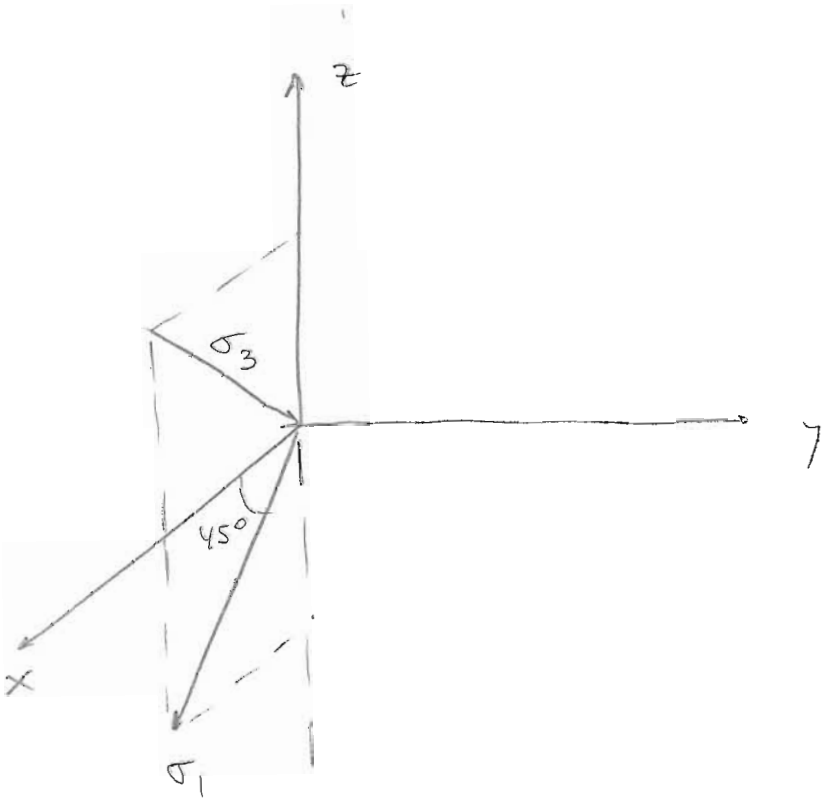
Y el tensor de tensiones es $\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 0 \end{bmatrix} (KN/m^2)$

4) Tensiones principales:

$$\left|\begin{array}{lll} \sigma_1 = 50 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \overline{n}_1^T = [1,0,-1]\,\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sigma_2 = 0 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \overline{n}_2^T = [0,1,0] \\ \sigma_3 = -50 \ KN/m^2 & \longrightarrow & \overline{n}_3^T = [1,0,1]\,\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Por lo tanto, la máxima tensión principal de tracción es $\sigma_1 = 50 \ KN/m^2$ y los ángulos que forma con los ejes x, y, z son:

- 45° con el eje x
- 90° con el eje y
- 135° con el eje z

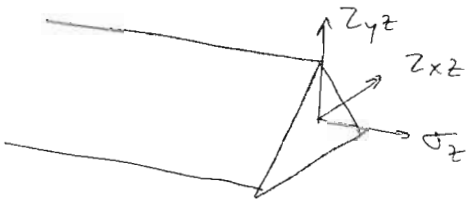


5) La fórmula del cortante en Resistencia de Materiales es la fórmula de Coliguon.

$$\tau = \frac{Q \cdot M_{est}}{I \cdot b}$$

Al no haber flexión : $Q = 0$ en toda la viga.

Por tanto : $\tau = \tau_{yz} = 0$



$$\tau_{yz} = \frac{\frac{P \cdot a}{2}}{\frac{\sqrt{3}\, a^4}{80}} \left[\frac{1}{a\sqrt{3}} 6 \cdot x \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} + x \right] = \frac{60 \cdot 80}{\sqrt{3} \cdot 16} \cdot 2x = \frac{600}{\sqrt{3}} \cdot x \neq 0$$

Además, en Resistencia de Materiales τ_{yz} sólo depende de y, nunca de x. Por lo tanto, en este caso no es válido.

NOTA : Torsión en sección triangular por Saint Venant.

Torsión 12.

La ménsula de la figura está empotrada en el punto A. Tiene sección constante cuadrada de lado 4 m con peso específico 25 kN/m^3. Se encuentra sustentado, además, a una losa de peso específico 20 kN/m^3, ancho 5 m, grosor 0.2 m y de la misma longitud que la ménsula. El resultado de la acción de la losa es una flexión y una torsión en la ménsula. El empotramiento A permite el libre alabeo de la sección. El módulo de elasticidad transversal del material es de $8 \cdot 10^6$ kN/m².

Se considera para el cálculo que la sección resistente es únicamente la cuadrada. Para el análisis de la torsión en la pieza se admite emplear la formulación de la torsión uniforme, con una función de tensiones de Prandtl:

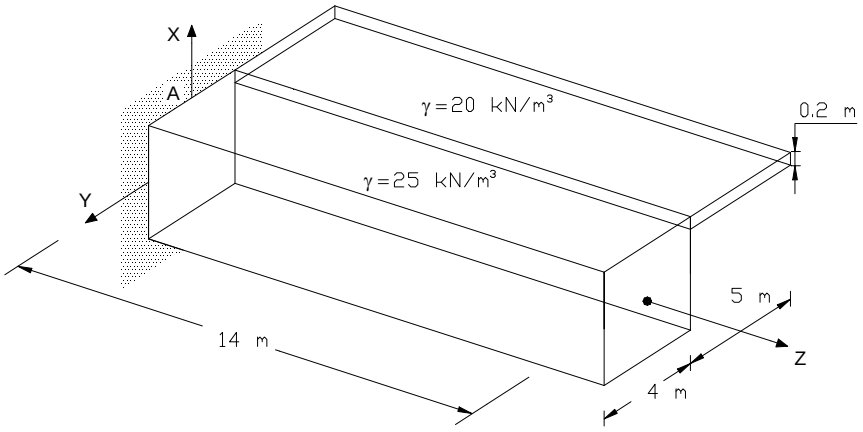
$$\Phi = K\,(x^2 - 2^2)\,(y^2 - 2^2)$$

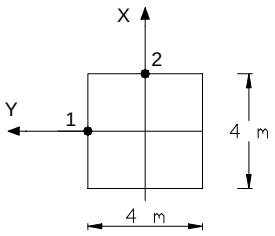
Para el cálculo de las tensiones producidas por flexión se admiten las distribuciones dadas por la Resistencia de Materiales. Se pide:

1. Si se adopta para K el valor $1.25 \cdot 10^6\ \theta$, obtener las tensiones tangenciales máximas en los puntos 1 y 2 de la sección de empotramiento (sección A).

2. Deducir el valor de K más adecuado para la función de tensiones dada en el enunciado.

(Examen de septiembre de 1999)





Enunciado: **EXAMEN SEPTIEMBRE 1999** Torsión 12 (45')

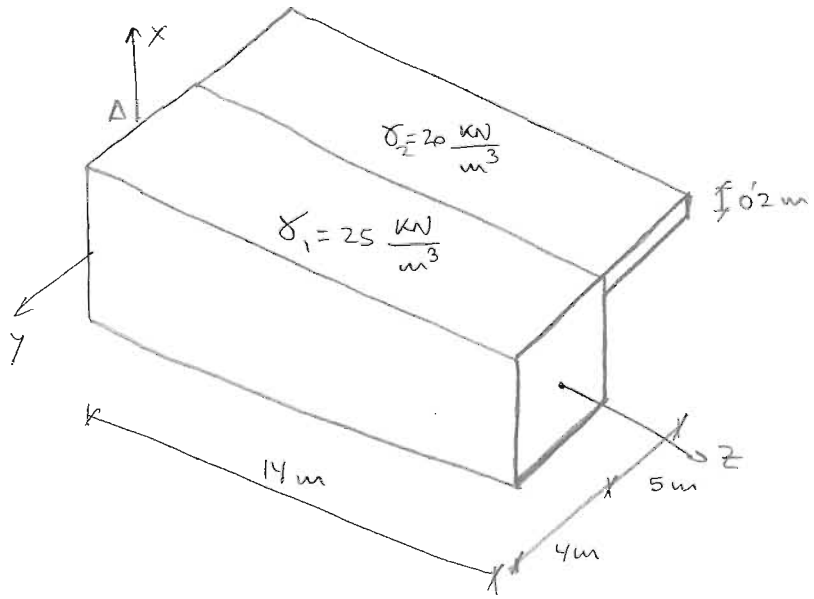
La ménsula de la figura está empotrada en el punto A. Tiene sección constante cuadrada de lado 4 m con peso específico $\gamma_1 = 25\ KN/m^3$. Se encuentra sustentado, además, a una losa de peso específico $\gamma_2 = 20\ KN/m^3$, ancho 5 m, grosor 0'20 m y de la misma longitud que la ménsula. El resultado de la acción de la losa es una flexión y una torsión en la ménsula. El empotramiento A permite el libre alabeo de la sección. El módulo de elasticidad transversal de la sección es $8 \cdot 10^6\ KN/m^2$.

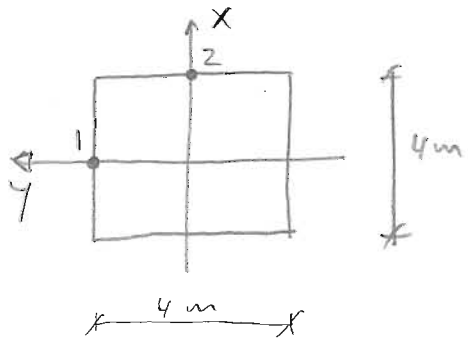
Se considera para el cálculo que la sección resistente es únicamente la cuadrada. Para el análisis de la torsión en la pieza se permite emplear la formulación de la torsión uniforme, con una función de tensiones de Prandtl:

$$\phi = K(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$$

Para el cálculo de las tensiones producidas por flexión se admiten las distribuciones dadas por la Resistencia de Materiales. Se pide.

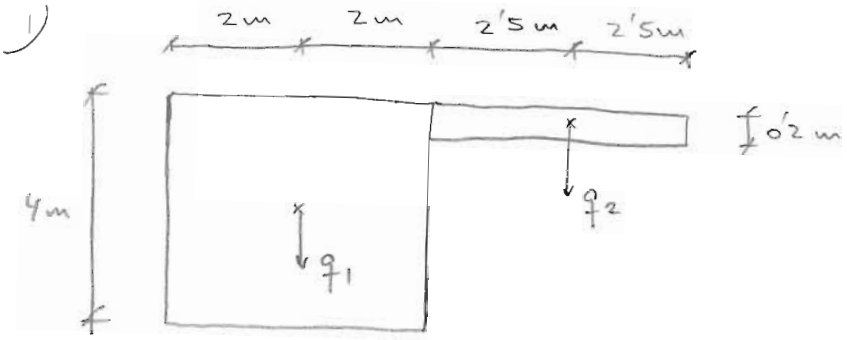
1) Si se adopta para K el valor $1'25 \cdot 10^6\ \alpha$, obtener las tensiones tangenciales máximas en los puntos 1 y 2 de la sección de empotramiento (sección A).
2) Deducir el valor K más adecuado para la función de tensiones dada en el enunciado





Resolución:

1)

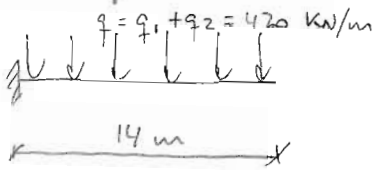


$q_1 = 4 \cdot 4 \cdot 25 = 400 \ \frac{KN}{m}$

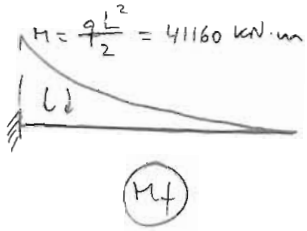
$q_2 = 5 \cdot 0'2 \cdot 20 = 20 \ \frac{KN}{m}$

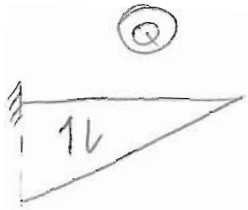
Las leyes de esfuerzos son:

FLEXIÓN:



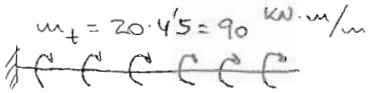
$\longrightarrow$



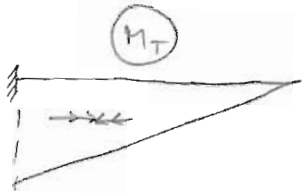


$Q = q \cdot L = 5880$ KN

TORSIÓN:



$\longrightarrow$

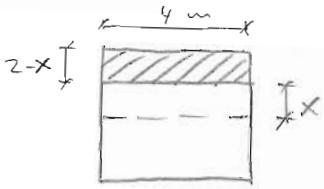


$M_T = 90 \cdot 14 = 1260$ KN·m

Flexión: En la sección A de empotramiento:

$$\sigma_z = \frac{M \cdot x}{I_y} = \frac{41160 \cdot x}{\frac{1}{12} \ 4 \cdot 4^3} = 1929'375 \cdot x$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q \ M_{est}}{I_y \cdot b}$$



$M_{est} = 4(2-x)\left(x + \frac{2-x}{2}\right) = 8 - 2x^2$

$$\tau_{xz} = \frac{-5880 \ (8-2x^2)}{\frac{1}{12} 4 \cdot 4^3 \ 4} = 137'81 \cdot x^2 - 551'25$$

Torsión: $\phi = K(x^2-4)(y^2-4)$ con $K = 1'25 \cdot 10^6 \cdot \alpha$ $\quad M_T = \alpha G J$ (tors uniforme)

Por lo tanto: $K = 1'25 \cdot 10^6 \ \frac{M_T}{GJ}$

En la sección de empotramiento: $K = 1'25 \cdot 10^6 \ \frac{1260}{8 \cdot 10^6 J} = \frac{196'875}{J}$

$$\phi^{EMP} = \frac{196'875}{J}(x^2-4)(y^2-4) = \frac{196'875}{J}\left[x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16\right]$$

Por lo tanto, las tensiones por torsión en el empotramiento son:

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{xz} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{196'875}{J}\left[2x^2y - 8y\right] \\ \tau_{yz} = \dfrac{-\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{196'875}{J}\left[-2xy^2 + 8x\right] \end{array} \right.$$

Para determinar J hay que imponer:

$$\phi\big|_{\Gamma} = 0 \quad \checkmark$$

$$\nabla^2 \phi = cte = -2G\alpha$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = \frac{196'875}{J}\left[2x^2 + 2y^2 - 16\right] \neq cte.$$

Hay que utilizar la fórmula aproximada de la inercia a torsión:

$$J_{APROX} = \frac{(Area)^4}{4M^2 \cdot I_{POLAR}}$$

- En general: $I_{POLAR} = \iint_{\Omega} \left[(x - x_G)^2 + (y - y_G)^2\right] d\Omega$
- Sección cuadrada: $I_{POLAR} = I_x + I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} 4 \cdot 4^3 = 42'667 \ m^4$

Sustituyendo:

$$J_{APROX} = \frac{16^4}{4M^2 \cdot 42'667} = 38'91 \ m^4$$

La J_{REAL} en sección cuadrada es: $J_{REAL} = \frac{20}{9}\left[\frac{a}{2}\right]^4 = 35'56 \ m^4$

Sustituyendo con J_{APROX} queda:

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{xz} = 10'12\, x^2 y - 40'48\, y \\ \tau_{yz} = -10'12\, x y^2 + 40'48\, x \end{array} \right.$$

y el tensor de tensiones total en el empotramiento:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10'12x^2y - 40'48y + 137'81x^2 - 551'25 \\ 0 & 0 & -10'12xy^2 + 40'48x \\ 10'12x^2y - 40'48y + 137'81x^2 - 551'25 & -10'12xy^2 + 40'48x & 1929'375 \cdot x \end{bmatrix}$$

En el punto 1: $(x=0, y=2)$

$$\underline{T}^{①} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -632'21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -632'21 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ll} \sigma_I = 632'21 & KN/m^2 \\ \sigma_{II} = 0 & KN/m^2 \\ \sigma_{III} = -632'21 & KN/m^2 \end{array}$$

$$\boxed{\tau_{MAX}^{①} = \frac{1}{2}\left[\sigma_I - \sigma_{III}\right] = 632'21 \ KN/m^2}$$

En el punto 2: $(x=2, y=0)$

$$\underline{T}^{②} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80'96 \\ 0 & 80'96 & 3858'75 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ll} \sigma_I = 3860'45 & KN/m^2 \\ \sigma_{II} = 0 & KN/m^2 \\ \sigma_{III} = -1'70 & KN/m^2 \end{array}$$

$$\boxed{\tau_{MAX}^{②} = \frac{1}{2}\left[\sigma_I - \sigma_{III}\right] = 1931'075 \ KN/m^2}$$

2) Valor de K más adecuado

$$M_T = 2\iint_\Omega \phi \, d\Omega = 2\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} K\left(x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16\right) dx\, dy =$$

$$= 4K\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{3}y^2 - 8y^2 - \frac{32}{3} + 32\right) dy = \frac{2048\,K}{9}$$

Como $M_T = G \cdot J \cdot \alpha \longrightarrow G \cdot J \cdot \alpha = \frac{2048}{9} K$

$$G \cdot J = 8 \cdot 10^6 \cdot 38'91 = 3'1128 \cdot 10^8 \ KN \cdot m^2$$

Entonces:

$$\alpha \cdot 3'1128 \cdot 10^8 = \frac{2048}{9} K \longrightarrow \boxed{K = 1'368 \cdot 10^6 \cdot \alpha}$$

Si usamos el $J_{REAL} = 35'56 \ m^4 \rightarrow G \cdot J = 2'8448 \cdot 10^8 \ KN \cdot m^2$

Resulta:

$$\boxed{K = 1'25 \ 10^6 \cdot \alpha}$$ (el del enunciado)

Este último es el mejor.

NOTA: Torsión en sección cuadrada + flexión.

Torsión 13.

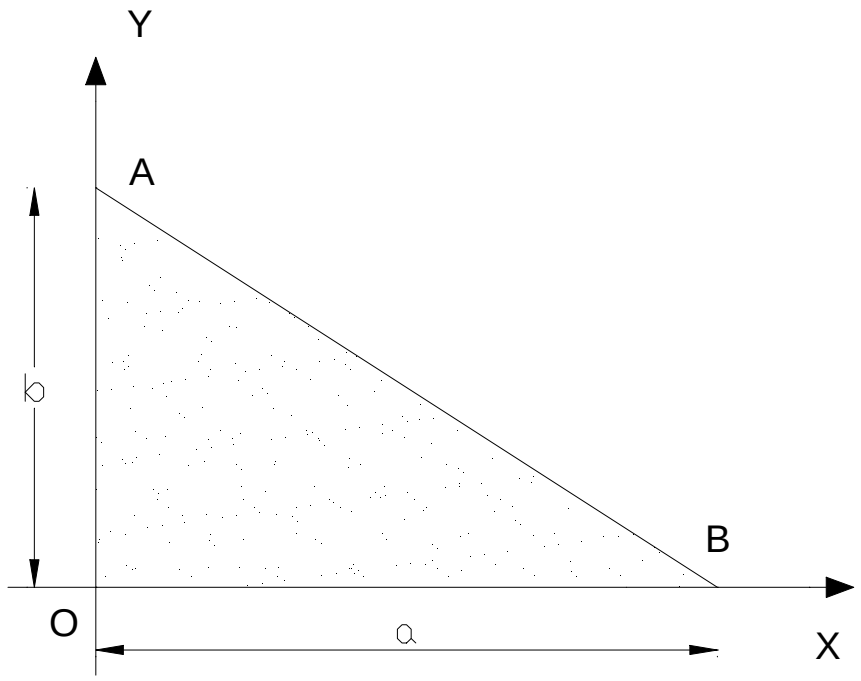
La figura muestra la sección triangular de una pieza prismática de sección constante. Dicha pieza se halla sometida a un estado de torsión uniforme de valor M_z. Se pide:

1. Determinar la rigidez torsional J.

2. Determinar la máxima tensión tangencial a lo largo del lado AB y punto en el que se produce.

Se utilizará el método de Rayleigh-Ritz con una función polinómica del mínimo grado posible en x e y.

(Examen de septiembre de 1987)

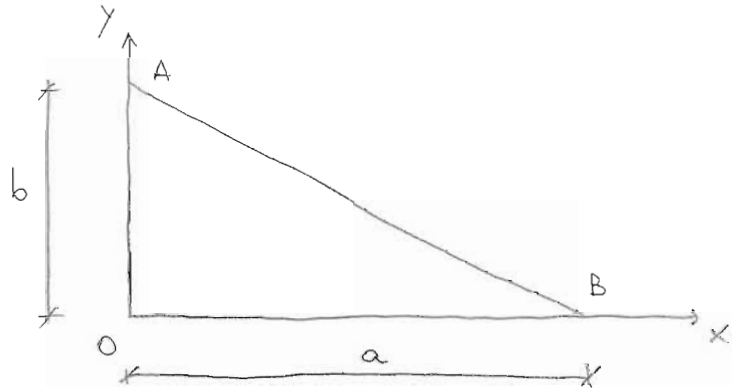


Enunciado: EXAMEN SEPTIEMBRE 1987 Torsión 13 (40')

La figura muestra la sección triangular de una pieza prismática de sección constante. Dicha pieza se halla sometida a un estado de torsión uniforme de valor M_z. Se pide:

1) Determinar la inercia torsional J.
2) Determinar la máxima tensión tangencial a lo largo del lado AB y punto en el que se produce.

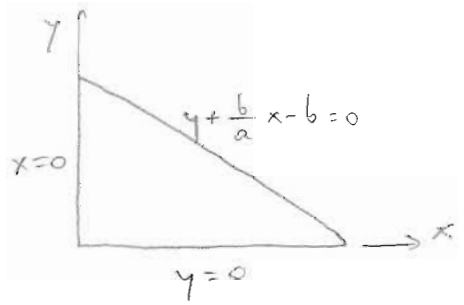
Se utilizará el método de Rayleigh-Ritz del mínimo grado posible en x e y.



Resolución:

1) En torsión, con el método de Rayleigh-Ritz, hay que obtener la función de tensiones ϕ.

$$\left| \begin{array}{l} \phi\big|_{\Gamma} = 0 \\ \nabla^2 \phi = cte = -2G\alpha \end{array} \right.$$



$$\phi = A \cdot x \cdot y \left(y + \frac{b}{a} x - b \right) =$$
$$= A x y^2 + \frac{Ab}{a} x^2 y - \frac{A}{b} x y$$

Esta función cumple $\phi\big|_{\Gamma} = 0$. Vamos a comprobar si el laplaciano es constante.

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = \frac{2Ab}{a} y \neq cte$$

Uso Rayleigh-Ritz, que da una solución aproximada.

La energía elástica es:

$$U = \frac{1}{2G} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = Ay^2 + \frac{2Ab}{a} xy - \frac{A}{b} y$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 = A^2 y^4 + \frac{4A^2 b}{a} xy^3 + \frac{4A^2 b^2}{a^2} x^2 y^2 - \frac{2A^2}{b} y^3 - \frac{4A^2}{a} xy^2 + \frac{A^2}{b^2} y^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2Axy + \frac{Ab}{a} x^2 - \frac{A}{b} x$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = \frac{A^2 b^2}{a^2} x^4 + \frac{4A^2 b}{a} x^3 y + 4A^2 x^2 y^2 - \frac{2A^2}{a} x^3 - \frac{4A^2}{b} x^2 y + \frac{A^2}{b^2} x^2$$

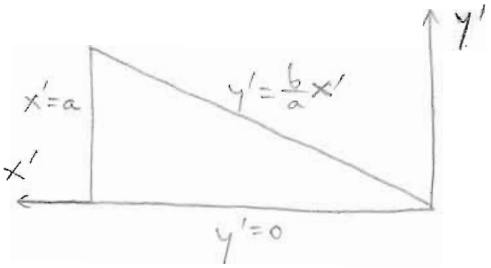
Por lo tanto.

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \Big[A^2 y^4 + \frac{4A^2 b}{a} xy^3 + \frac{4A^2 b^2}{a^2} x^2 y^2 - \frac{2A^2}{b} y^3 - \frac{4A^2}{a} xy^2 +$$

$$+ \frac{A^2}{b^2} y^2 + \frac{A^2 b^2}{a^2} x^4 + \frac{4A^2 b}{a} x^3 y + 4A^2 x^2 y^2 - \frac{2A^2}{a} x^3 - \frac{4A^2}{b} x^2 y + \frac{A^2}{b^2} x^2 \Big] dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2G} \int_0^a \Big[A^2 y^5 + \dots \Big] \Big|_0^{b-\frac{b}{a}x} dx$$ sale muy complicado de resolver

Lo mejor es hacer un cambio de base:



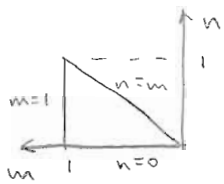
$$\phi = A \cdot y' \cdot (x' - a)\left(y' - \frac{b}{a} x'\right)$$

$$\nabla^2 \phi \neq cte$$

Hacemos además un cambio:

$$m = \frac{x'}{a} \longrightarrow x' = m \cdot a$$

$$n = \frac{y'}{b} \longrightarrow y' = n \cdot b$$



Sustituyendo

$$\phi = A \cdot n \cdot b\,(ma - a)(nb - bm) = A \cdot a \cdot b^2 (mn - m^2 - n + m) \cdot n$$

$$\text{si } B = A \cdot a \cdot b^2 \longrightarrow \phi = B\left[mn^2 - m^2 n - n^2 + mn\right]$$

La energía elástica es:

$$U = \frac{1}{2G} \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right)^2 \right] d\Omega$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \frac{\partial \phi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x'} = B\left(n^2 - 2mn + n\right) \frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)^2 = \frac{B^2}{a^2} \left[n^4 - 4mn^3 + 4m^2n^2 + 2n^3 - 4mn^2 + n^2 \right]$$

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)^2 = \frac{B^2}{a^2} \int_0^1 \int_0^m \left(n^4 - 4mn^3 + 4m^2n^2 + 2n^3 - 4mn^2 + n^2\right) b\, dn\, a\, dm =$$

$$= \frac{bB^2}{a} \int_0^1 \left[\frac{n^5}{5} - mn^4 + \frac{4}{3} m^2 n^3 + \frac{n^4}{2} - \frac{4}{3} mn^3 + \frac{n^3}{3} \right] \Big|_0^m dm =$$

$$= \frac{bB^2}{a} \int_0^1 \left[\frac{m^5}{5} - m^5 + \frac{4}{3} m^5 + \frac{m^4}{2} - \frac{4}{3} m^4 + \frac{m^3}{3} \right] dm =$$

$$= \frac{bB^2}{a} \int_0^1 \left[\frac{8}{15} m^5 - \frac{5}{6} m^4 + \frac{m^3}{3} \right] dm = \frac{bB^2}{a} \left[\frac{4}{45} m^6 - \frac{m^5}{6} + \frac{m^4}{12} \right] \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{bB^2}{a} \left[\frac{4}{45} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right] = \frac{bB^2}{a} \frac{(80 - 150 + 75)}{900} = \frac{bB^2}{a} \frac{5}{900} = \frac{bB^2}{180a}$$

Además:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y'} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y'} = B\left(2mn - m^2 - 2n + m\right) \cdot \frac{1}{b}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right)^2 = \frac{B^2}{b^2} \left[m^4 - 4m^3 n + 4m^2 n^2 - 2m^3 + 8m^2 n - 8mn^2 + m^2 + 4n^2 - 4mn \right]$$

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right)^2 = \frac{B^2}{b^2} \int_0^1 \int_0^m \left[m^4 - 4m^3 n + 4m^2 n^2 - 2m^3 + 8m^2 n - 8mn^2 + m^2 + 4n^2 - 4mn \right] b\, dn\, a\, dm =$$

$$= \frac{aB^2}{b} \int_0^1 \left[m^4 n - 2m^3 n^2 + \frac{4}{3} m^2 n^3 - 2m^3 n + 4m^2 n^2 - \frac{8}{3} mn^3 + m^2 n + \frac{4}{3} n^3 - 2mn^2 \right] \Big|_0^m dm$$

$$= \frac{aB^2}{b} \int_0^1 \left[m^5 - 2m^5 + \frac{4}{3} m^5 - 2m^4 + 4m^4 - \frac{8}{3} m^4 + m^3 + \frac{4}{3} m^3 - 2m^3 \right] dm =$$

$$= \frac{aB^2}{b} \int_0^1 \left[\frac{1}{3} m^5 - \frac{2}{3} m^4 + \frac{1}{3} m^3 \right] dm = \frac{aB^2}{b} \left[\frac{m^6}{18} - \frac{2}{15} m^5 + \frac{1}{12} m^4 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{aB^2}{b} \frac{(10 - 24 + 15)}{180} = \frac{aB^2}{180b}$$

Por lo tanto: $U = \frac{B^2}{360G}\left[\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right]$

Y la energía potencial $W = 2\alpha \iint_\Omega \phi \, d\Omega$

$$W = 2\alpha B \int_0^1 \int_0^m \left[mn^2 - m^2 n - n^2 + mn\right] b\,dn\,a\,dm =$$

$$= 2ab\alpha B \int_0^1 \left[\frac{mn^3}{3} - \frac{m^2n^2}{2} - \frac{n^3}{3} + \frac{mn^2}{2}\right]\Big|_0^m dm =$$

$$= 2ab\alpha B \int_0^1 \left[\frac{-m^4}{6} + \frac{m^3}{6}\right] dm = 2ab\alpha B \left[\frac{-m^5}{30} + \frac{m^4}{24}\right]_0^1 = \frac{ab\alpha B}{60}$$

Entonces, la energía potencial total es:

$$V = U - W = \frac{B^2}{360G}\left[\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right] - \frac{ab\alpha B}{60}$$

Derivando, para hacer mínima V:

$$\frac{\partial V}{\partial B} = 0 = \frac{2B}{360G}\left[\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right] - \frac{ab\alpha}{60}$$

$$B\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 3Gab\alpha \longrightarrow B = \frac{3Gab\alpha}{\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)}$$

Sabemos también

$$M_T = 2\iint_\Omega \phi \, d\Omega = G \cdot J \cdot \alpha = \frac{W}{\alpha} = \frac{abB}{60} \longrightarrow J = \frac{abB}{60G\alpha}$$

Sustituyendo:

$$J = \frac{ab\,3G \cdot a \cdot b\,\alpha}{60G\alpha\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)} = \frac{a^2b^2}{20\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)} = \frac{a^2b^2}{20\,\frac{(b^2+a^2)}{ab}}$$

$$\boxed{J = \frac{a^3b^3}{20(a^2+b^2)}}$$

INERCIA TORSIONAL DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

2) Máxima tensión tangencial en el lado AB

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{x'z'} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y'} = \dfrac{B}{b}\left(2mn - m^2 - 2n + m\right) \\ \tau_{y'z'} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x'} = -\dfrac{B}{a}\left(n^2 - 2mn + n\right) \end{array} \right.$$

$\tau_{MAX} = \sqrt{\tau_{x'z'}^2 + \tau_{y'z'}^2}$ $\longrightarrow$ Se produce donde es maximo $\tau_{x'z'}^2 + \tau_{y'z'}^2$

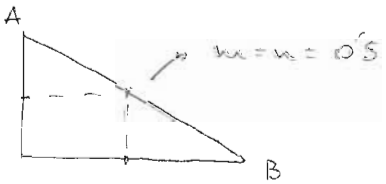
$$C = \tau_{x'z'}^2 + \tau_{y'z'}^2 = \frac{B^2}{a^2}\left[n^4 - 4mn^3 + 4m^2n^2 + 2n^3 - 4mn^2 + n^2\right] +$$

$$+ \frac{B^2}{b^2}\left[m^4 - 4m^3n + 4m^2n^2 - 2m^3 + 8m^2n - 8mn^2 + m^2 + 4n^2 - 4mn\right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial m} = 0 = \frac{B^2}{a^2}\left[-4n^3 + 8mn^2 - 4n^2\right] + \frac{B^2}{b^2}\left[4m^3 - 12m^2n + 8mn^2 - 6m^2 + \right.$$

$$\left. + 8mn - 8n^2 + 2m - 4n\right]$$ Sale muy complicado.

Los puntos donde se produce la máxima tensión tangencial son los centros de los lados.



Sustituyendo:

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{x'z'} = \dfrac{B}{b}\left(2\cdot 0'5^2 - 0'5^2 - 2\cdot 0'5 + 0'5\right) = -0'25\,\dfrac{B}{b} \\ \tau_{y'z'} = \dfrac{-B}{a}\left(0'5^2 - 2\cdot 0'5\cdot 0'5 + 0'5\right) = \dfrac{-0'25\,B}{a} \end{array} \right.$$

$$\tau_{MAX}^{AB} = \sqrt{\tau_{x'z'}^2 + \tau_{y'z'}^2} = \sqrt{\frac{0'0625\,B^2}{b^2} + \frac{0'0625\,B^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{0'0625\,a^2B^2 + 0'0625\,b^2B^2}{a^2b^2}} =$$

$$\tau_{MAX}^{AB} = \frac{B}{4ab}\sqrt{a^2+b^2}$$ Como $B = \dfrac{3Gab\alpha}{\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)}$

Por tanto:

$$\tau_{max}^{AB} = \frac{3G\cancel{a}\cancel{b}\alpha}{4\cancel{a}\cancel{b}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{3G\alpha}{4}\,ab\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)}$$

$$\boxed{\tau_{MAX}^{AB} = \frac{3ab\,G\cdot\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$$ en el punto $x = \frac{a}{2}$ $y = \frac{b}{2}$

NOTA: Torsión por Rayleigh – Ritz

Enunciado: Torsión 14 (50')

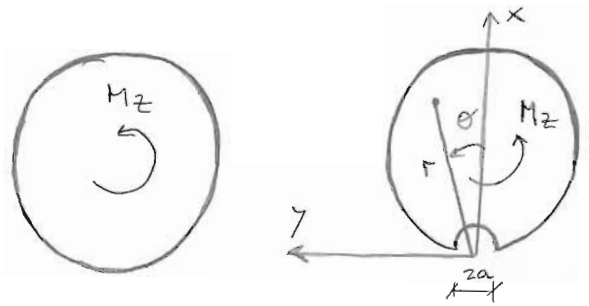
Una barra de sección circular maciza de radio R está sometida a un momento torsor M_z. Se pide:

1) Determinar la máxima tensión que se produce.
2) Si en la barra anterior se practica una ranura semicircular de radio a despreciable frente a R, obtener la máxima tensión en la nueva sección y compararla con la anterior.

Utilícese la formulación en tensiones y considérese para el caso 2) la función de tensiones:

$$\phi = \frac{K}{r}\left(r - 2R\cos\theta\right)\left(r^2 - a^2\right)$$

Nótese que las funciones entre paréntesis definen el contorno de la sección de la barra



Resolución:

1) Utilizamos una función de tensiones que cumpla:

$$\left| \begin{array}{l} \phi\big|_{\Gamma} = 0 \\ \nabla^2\phi = cte = -2G\alpha \end{array} \right.$$

El contorno lateral es: $x^2 + y^2 = R^2$ (con origen de ejes en el centro del círculo)

Por lo tanto, utilizamos $\phi = A\left[x^2 + y^2 - R^2\right]$

y el laplaciano:

$$\nabla^2\phi = \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right] = 2A + 2A = 4A = cte = -2G\alpha \rightarrow A = \frac{-G\alpha}{2}$$

Además

$$M_z = 2\iint_{\Omega}\phi\, dx\, dy$$

$$M_z = 2A\iint_\Omega \left[x^2+y^2-R^2\right] d\Omega = 2A\underbrace{\iint_\Omega x^2 d\Omega}_{I_y} + 2A\underbrace{\iint_\Omega y^2 d\Omega}_{I_x} - 2AR^2\underbrace{\iint d\Omega}_{\Omega} =$$

$$= 2A\cdot\frac{1}{4}\pi R^4 + 2A\cdot\frac{1}{4}\pi R^4 - 2AR^2\cdot\pi R^2 = A\pi R^4 - 2A\pi R^4 = -A\pi R^4$$

Por lo tanto:

$$M_z = -A\pi R^4 = \frac{G\cdot\pi\cdot R^4\cdot\alpha}{2}$$

Y como $M_z = G\cdot J\cdot\alpha \longrightarrow \cancel{G}\cdot J\cdot\cancel{\alpha} = \dfrac{\cancel{G}\cdot\pi\cdot R^4\cdot\cancel{\alpha}}{2}$

Por lo tanto: $\boxed{J = \frac{1}{2}\pi R^4}$ Inercia a torsión en sección circular

Las tensiones debidas a torsión son:

$$A = \frac{-G\cdot\alpha}{2} = \frac{-\cancel{G}\cdot M_z}{2\cancel{G}\cdot J} = \frac{-M_z}{2\cdot\frac{1}{2}\pi R^4} = \frac{-M_z}{\pi R^4}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2\cdot y\cdot A = \frac{-2M_z}{\pi R^4}\cdot y$$

$$\tau_{yz} = \frac{-\partial\phi}{\partial x} = -2\cdot x\cdot A = \frac{2M_z}{\pi R^4}\cdot x$$

Por lo tanto:

$$\tau_{MAX} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2M_z}{\pi R^4}\sqrt{x^2+y^2}$$

El máximo se producirá en (x^2+y^2) máximo

$$(x^2+y^2)_{MAX} = R^2$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\tau_{MAX} = \frac{2M_z}{\pi R^3}}$$

2)

$$\phi = \frac{K}{r}\left(r - 2R\cos\theta\right)\left(r^2 - a^2\right) \quad \text{debe cumplir}$$

$$\phi\big|_{\Gamma} = 0$$

La ecuación de la circunferencia exterior es $r = 2R\cos\theta$

y la de la circunferencia pequeña es : $r = a$

Por lo tanto, la condición $\phi\big|_{\Gamma} = 0$ se cumple.

Ahora hay que comprobar que el laplaciano es constante.

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = cte = -2G\alpha$$

$$\phi = \frac{K}{r}\left[r^3 - 2r^2R\cos\theta - a^2r + 2a^2R\cos\theta\right]$$

$$\phi = K\left[r^2 - 2rR\cos\theta - a^2 + \frac{2a^2}{r}R\cos\theta\right]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = K\left[2r - 2R\cos\theta - \frac{2a^2}{r^2}R\cos\theta\right]$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = K\left[2 + \frac{4a^2}{r^3}R\cos\theta\right]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = K\left[2rR\,\text{sen}\,\theta - \frac{2a^2}{r}R\,\text{sen}\,\theta\right]$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = K\left[2rR\cos\theta - \frac{2a^2R}{r}\cos\theta\right]$$

Por lo tanto:

$$\nabla^2\phi = K\left[2 + \cancel{\frac{4a^2}{r^3}R\cos\theta}\right] + K\left[2 - \cancel{\frac{2R}{r}\cos\theta} - \cancel{\frac{2a^2}{r^3}R\cos\theta}\right] +$$

$$+ K\left[\cancel{\frac{2R}{r}\cos\theta} - \cancel{\frac{2a^2R}{r^3}\cos\theta}\right] = 4K = cte = -2G\alpha \rightarrow K = \frac{-G\alpha}{2}$$

(igual que sección circular)

Entonces, se tiene $K = \frac{-M_z}{\pi R^4}$ (por considerarse $a \to 0$)

$$\phi = \frac{-M_z}{\pi R^4}\left[r^2 - 2rR\cos\theta - a^2 + \frac{2a^2}{r}R\cos\theta\right]$$

y las tensiones:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = \frac{-\partial\phi}{\partial x} = \frac{-\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

En los ejes de la figura se tiene

$$\left|\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow r^2=x^2+y^2 \longrightarrow \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r} \qquad \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r} \\ tg\,\theta=\dfrac{y}{x} \longrightarrow \dfrac{\partial \theta}{\partial x}=\dfrac{-y}{r^2}\ ;\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{x}{r^2} \end{array}\right.$$

Sustituyendo:

$$\tau_{xz}=K\left[2r-2R\cos\theta-\frac{2a^2}{r^2}R\cos\theta\right]\frac{y}{r}+K\left[2rR\,sen\theta-\frac{2a^2R}{r}sen\theta\right]\frac{x}{r^2}=$$

$$=K\left[2y-\frac{2Ry}{r}\cos\theta-\frac{2a^2Ry}{r^3}\cos\theta+\frac{2Rx}{r}sen\theta-\frac{2a^2Rx}{r^3}sen\theta\right]$$

Como $\left|\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{x}{r}\\ sen\theta=\dfrac{y}{r}\end{array}\right.$ se tiene:

$$\tau_{xz}=K\left[2y-\cancel{\frac{2Rxy}{r^2}}-\frac{2a^2Rxy}{r^4}+\cancel{\frac{2Rxy}{r^2}}-\frac{2a^2Rxy}{r^4}\right]=$$

$$=K\left[2y-\frac{4a^2Rxy}{r^4}\right]=\frac{-M_z}{\pi R^4}\left[2y-\frac{4a^2Rxy}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\tau_{yz}=K\left[-2r+2R\cos\theta+\frac{2a^2}{r^2}R\cos\theta\right]\frac{x}{r}+K\left[-2rR\,sen\theta+\frac{2a^2R}{r}sen\theta\right]\left(\frac{-y}{r^2}\right)=$$

$$=K\left[-2x+\frac{2Rx}{r}\cos\theta+\frac{2a^2Rx}{r^3}\cos\theta+\frac{2Ry}{r}sen\theta-\frac{2a^2Ry}{r^3}sen\theta\right]=$$

$$=K\left[-2x+\frac{2Rx^2}{r^2}+\frac{2a^2Rx^2}{r^4}+\frac{2Ry^2}{r^2}-\frac{2a^2Ry^2}{r^4}\right]=$$

$$=K\left[-2x+\frac{2R}{r^2}(x^2+y^2)+\frac{2a^2R}{r^4}(x^2-y^2)\right]=K\left[-2x+2R+\frac{2a^2R}{r^4}(x^2-y^2)\right]$$

$$=\frac{-M_z}{\pi R^4}\left[-2x+2R+\frac{2a^2R}{(x^2+y^2)^2}(x^2-y^2)\right]$$

La tensión máxima es $\tau_{MAX}=\sqrt{\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2}$ y se produce en $(x=a,\ y=0)$

$$\tau_{MAX}=\sqrt{\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2}=\sqrt{0^2+\left[\frac{-M_z}{\pi R^4}\left(-2a+2R+\frac{2a^2Ra^2}{a^4}\right)\right]^2}=\frac{M_z}{\pi R^4}\left[4R-2a\right]$$

$$\boxed{\tau_{MAX}=\frac{2M_z}{\pi R^4}(2R-a)}$$

si $a\to 0$

$$\boxed{\tau_{MAX}=\frac{4M_z}{\pi R^3}}$$

(doble que en sección circular)

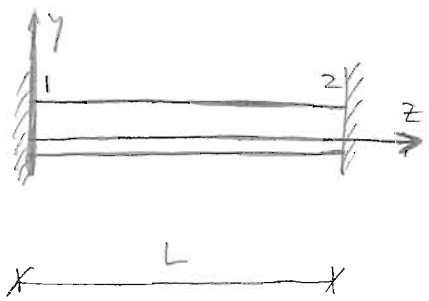
NOTA: Torsión en sección circular

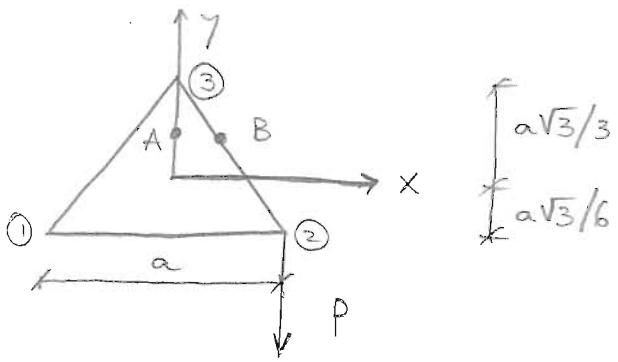
Enunciado: Torsión 15 (70')

La viga de la figura, cuya sección es un triángulo equilátero de lado a metros, tiene una luz L metros, y se encuentra sometida a una carga puntual excéntrica de P KN, aplicada en la sección centro de luz. Las secciones extremas 1 y 2 de la viga están empotradas, pero sin coaccionar el alabeo de la sección. Se pide:

1) Comprobar que la función $f(x,y) = q\,(3xy^2 - x^3)$ es la función de Saint Venant correspondiente a la torsión de la viga, y determinar el valor de q.
2) Obtener el valor de la inercia a torsión J, en m^4, bien a partir de $f(x,y)$ o bien mediante fórmulas aproximadas.
3) Obtener el tensor de tensiones, en KN/m^2, en el punto A, de coordenadas $\left(x=0,\ y=a\frac{\sqrt{3}}{6},\ z=L\right)$.
4) Obtener las tensiones principales, en KN/m^2, y los cosenos directores de las tensiones principales en dicho punto A.
5) Obtener el desplazamiento según el eje z en mm, del punto B de coordenadas $\left(x=\frac{a}{6},\ y=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ z=L\right)$.
6) Comentar la validez de la fórmula de Resistencia de Materiales para el cálculo de las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo cortante, a lo largo de la recta de ecuación $y=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $z=L$

DATOS: $L = 12$ m, $\nu = 0'20$, $P = 40$ KN, $E = 2\cdot 10^8 \frac{KN}{m^2}$, $a = 1$ m.



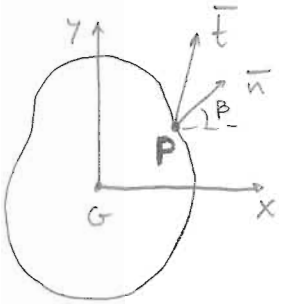


Resolución:

1) La función f debe cumplir:

* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (1) Ecuación de equilibrio

* Condiciones de contorno en contorno lateral



$$\bar{t} = T \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} \cdot \cos\beta + \tau_{yz} \cdot \operatorname{sen}\beta \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\tau_{xz} \cdot \cos\beta + \tau_{yz} \cdot \operatorname{sen}\beta = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz} &= G \cdot \alpha \left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right] \\ \tau_{yz} &= G \cdot \alpha \left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right] \end{aligned}\right\} \rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x} - y\right]\cos\beta + \left[\frac{\partial f}{\partial y} + x\right]\operatorname{sen}\beta = 0 \quad \text{en } \Gamma$$

Comprobamos lo que sucede en cada cara:

CARA ①-②: $y = \dfrac{-a\sqrt{3}}{6}$ $\qquad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\beta = -1 \\ \cos\beta = 0 \end{cases}$

$$f(x,y) = q\left(3xy^2 - x^3\right) \rightarrow \left|\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3qy^2 - 3qx^2 = \frac{qa^2}{4} - 3qx^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6qxy = -a\sqrt{3}qx \end{aligned}\right.$$

Sustituyendo:

$$\left[\frac{qa^2}{4} - 3qx^2 + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right] \cdot 0 + \left[-a\sqrt{3}qx + x\right](-1) = 0$$

$$a\sqrt{3}qx = x \rightarrow \boxed{q = \frac{1}{a\sqrt{3}}}$$

CARA ②-③: $y = -\sqrt{3}x + \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \bar{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\beta = 1/2 \\ \cos\beta = \sqrt{3}/2 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3qy^2 - 3qx^2 = 3q\left(3x^2 + \frac{a^2}{3} - 2xa\right) - 3qx^2 = 6qx^2 + qa^2 - 6qxa$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6qxy = 6qx\left(-\sqrt{3}x + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = -6\sqrt{3}qx^2 + 2\sqrt{3}qax$$

Sustituyendo:

$$\left[6qx^2+qa^2-6qxa+\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right]\frac{\sqrt{3}}{2}+\left[-6\sqrt{3}qx^2+2\sqrt{3}qax+x\right]\frac{1}{2}=$$

$$=\cancel{3\sqrt{3}qx^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}qa^2-3\sqrt{3}qxa+\frac{3}{2}x-\frac{a}{2}-\cancel{3\sqrt{3}qx^2}+\sqrt{3}qxa+\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}qa^2-2\sqrt{3}qxa+2x-\frac{a}{2}$$

Si sustituimos $q=\frac{1}{a\sqrt{3}}$ se tiene

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\frac{1}{\cancel{a\sqrt{3}}}a^{\cancel{2}}-2\cancel{\sqrt{3}}\frac{1}{\cancel{a\sqrt{3}}}x\cancel{a}+2x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-2x+2x-\frac{a}{2}=0 \quad \checkmark$$

<u>CARA ①-③:</u> $y=\sqrt{3}x+\frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\quad \bar{n}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix} \rightarrow \left|\begin{array}{l}\operatorname{sen}\beta=1/2\\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3qy^2-3qx^2=3q\left(3x^2+\frac{a^2}{3}+2xa\right)-3qx^2=6qx^2+qa^2+6qxa$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6qxy=6qx\left(\sqrt{3}x+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=6\sqrt{3}qx^2+2\sqrt{3}qxa$$

Sustituyendo:

$$\left[6qx^2+qa^2+6qxa-\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right]\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+\left[6\sqrt{3}qx^2+2\sqrt{3}qxa+x\right]\frac{1}{2}=$$

$$=-\cancel{3\sqrt{3}qx^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}qa^2-3\sqrt{3}qxa+\frac{3}{2}x+\frac{a}{2}+\cancel{3\sqrt{3}qx^2}+\sqrt{3}qxa+\frac{x}{2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}qa^2-2\sqrt{3}qxa+2x+\frac{a}{2}$$

Si sustituimos $q=\frac{1}{a\sqrt{3}}$ se tiene.

$$-\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\frac{1}{\cancel{a\sqrt{3}}}a^{\cancel{2}}-2\cancel{\sqrt{3}}\frac{1}{\cancel{a\sqrt{3}}}x\cancel{a}+2x+\frac{a}{2}=-\frac{a}{2}-2x+2x+\frac{a}{2}=0 \quad \checkmark$$

Ahora hay que comprobar la ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6qx+6qx=0 \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $\boxed{f=\frac{1}{a\sqrt{3}}\left(3xy^2-x^3\right)}$ es la función de Saint Venant del problema.

2) Inercia a torsión.

$$J = \iint_\Omega \left[x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 + y^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \iint_\Omega \left[6q x^2 y - \frac{q a^2}{4} y - 3q x^2 y + x^2 + y^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \int_{y=-\frac{a\sqrt{3}}{6}}^{y=\frac{a\sqrt{3}}{3}} \int_{x=\frac{y\sqrt{3}-a}{3}}^{x=\frac{a-y\sqrt{3}}{3}} \left[3q x^2 y - \frac{q a^2}{4} y + x^2 + y^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{3}}^{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \left[q x^3 y - \frac{q a^2}{4} x y + \frac{x^3}{3} + x y^2 \right] \Bigg|_{\frac{y\sqrt{3}-a}{3}}^{\frac{a-y\sqrt{3}}{3}} dy$$

Resolviendo: $\boxed{J = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4} = 2'165 \cdot 10^{-2}\, m^4$

Y con la fórmula aproximada:

$$J_{APROX} = \frac{(Area)^4}{4\pi^2 I_{POLAR}}$$

$$I_{POLAR} = I_{XG} + I_{YG} = \frac{1}{36} a \cdot h^3 + 2\left[\frac{1}{36} h \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} h \frac{a}{2} \left(\frac{a}{6}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{36} a h^3 + \frac{1}{144} h a^3 + \frac{1}{72} h a^3 = \frac{1}{36} a h^3 + \frac{1}{48} h a^3$$

Como $h = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\qquad h^3 = \frac{a^3 3\sqrt{3}}{8}$

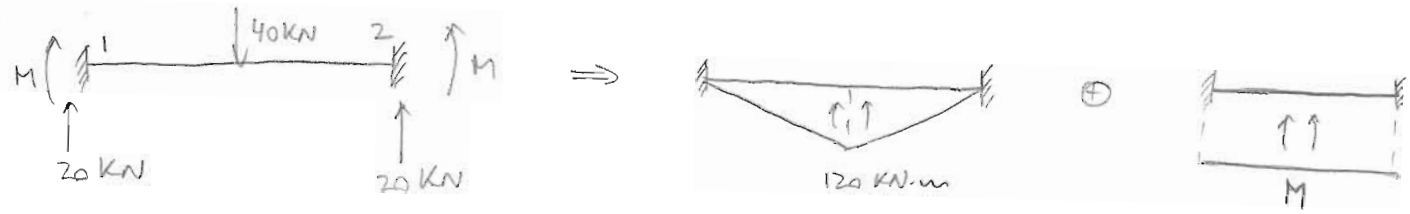
$$I_{POLAR} = \frac{1}{36} a \cdot \frac{a^3 3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{48} \frac{a\sqrt{3}}{2} a^3 = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4 + \frac{\sqrt{3}}{96} a^4 = \frac{\sqrt{3}}{48} a^4$$

$$J_{APROX} = \frac{\left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^4}{4\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{48} a^4} = \frac{48 \cdot 9 \cdot a^8}{4 \cdot 256\, \pi^2 \cdot \sqrt{3}\, a^4} = 2'47 \cdot 10^{-2} a^4 = 2'47 \cdot 10^{-2}\, m^4$$

3) Tensor de tensiones en $\left(x = 0,\ y = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ z = L\right)$

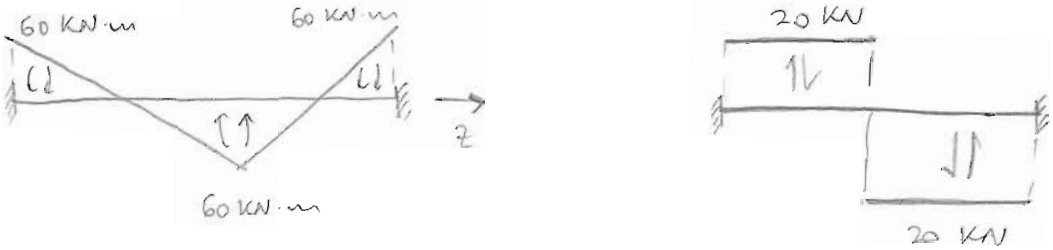
Flexión:

Las leyes de esfuerzos son:



$$\theta_2 = 0 = \cancel{\theta_1}^{\,0} + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\,120\cdot 12 + M\cdot 12\right] = 0 \quad \rightarrow \quad M = -60 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

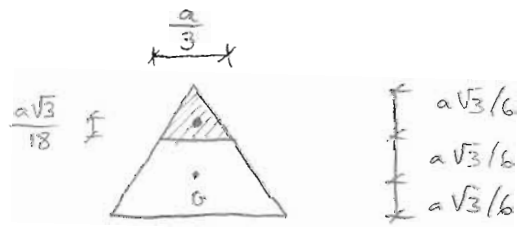
Las leyes de flectores y cortantes son:



en $z = L$: $\quad \sigma_z^F = \dfrac{-M_f \cdot y}{I} = \dfrac{60\,\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{1}{36}\,a\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3} = 960 \text{ KN/m}^2$

Y debido a cortantes:

$$\tau_{yz}^F = \frac{Q\cdot M_{est}}{I\cdot b}$$



Donde

$$Q = 20 \text{ KN}$$

$$M_{est} = \frac{1}{2}\,\frac{a}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{6}\left[\frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{a\sqrt{3}}{18}\right] = \frac{a^3}{54} = 1'852\cdot 10^{-2}\text{ m}^3$$

$$I = \frac{1}{36}\,a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{a^4\sqrt{3}}{96}$$

$$b = \frac{a}{3}$$

Por tanto:

$$\tau_{yz}^F = \frac{20\cdot\dfrac{a^3}{54}}{\dfrac{a^4\sqrt{3}}{96}\;\dfrac{a}{3}} = \frac{5760}{54\,a^2\sqrt{3}} = 61'58 \text{ KN/m}^2$$

Torsión:

$$\tau_{xz} = G \cdot \alpha \left[\frac{\partial f}{\partial x} - y \right]$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \alpha \left[\frac{\partial f}{\partial y} + x \right]$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8'333 \cdot 10^{7} \ KN/m^2$$

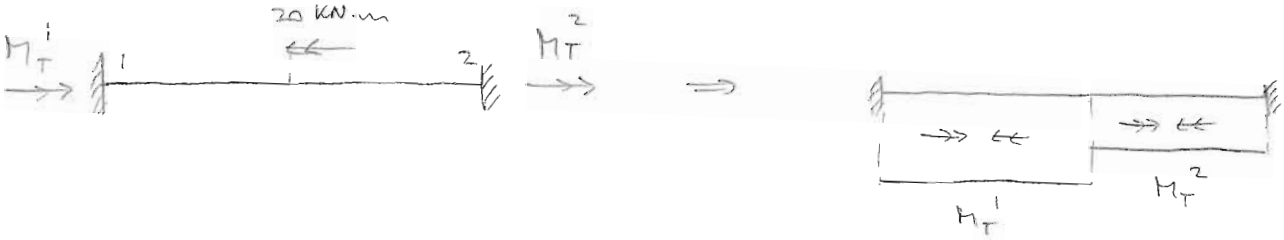
$$M_z = G \cdot J \cdot \alpha \rightarrow G \cdot \alpha = \frac{M_z}{J} = \frac{M_z}{2'165 \cdot 10^{-2}} = 46'19 \ M_z$$

Sustituyendo:

$$\tau_{xz} = 46'19 \cdot M_z \left[\frac{3y^2}{\sqrt{3}} - \frac{3x^2}{\sqrt{3}} - y \right] = M_z \left[80 \cdot y^2 - 80x^2 - 46'19 y \right]$$

$$\tau_{yz} = 46'19 \ M_z \left[\frac{6xy}{\sqrt{3}} + x \right] = M_z \left[160 x \cdot y + 46'19 \cdot x \right]$$

Falta obtener el momento torsor.

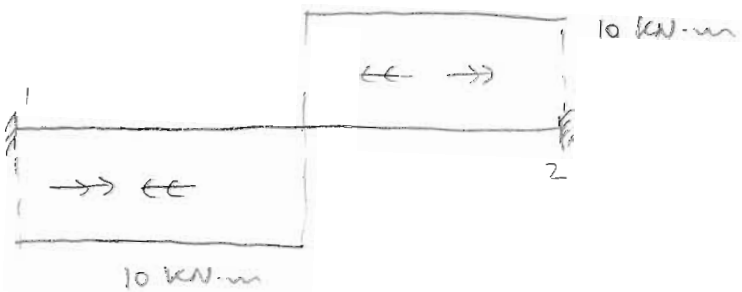


$$M_T^1 - 20 = M_T^2$$

$$\vec{\omega}_2 = 0 = \vec{\omega}_1 + \frac{1}{G \cdot J} \left[-M_T^1 \cdot 6 - M_T^2 \cdot 6 \right] = \frac{1}{GJ} \left[-M_T^1 \cdot 6 - M_T^1 \cdot 6 + 120 \right] = 0$$

$$M_T^1 = 10 \ KN \cdot m$$

Y la ley de momentos torsores es:



Sustituyendo las coordenadas, se tiene

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{xz}^{T} = -66'67 \ KN/m^2 \\ \tau_{yz}^{T} = 0 \ KN/m^2 \end{array} \right. \quad \text{con } M_z = 10 \ m \cdot KN$$

Sumando los efectos de torsión y flexión se tiene:

$$\underline{T}^{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -66'67 \\ 0 & 0 & 61'58 \\ -66'67 & 61'58 & 960 \end{bmatrix} \ KN/m^2$$

4) Tensiones y direcciones principales en A:

$$\sigma_I = 968'50 \ KN/m^2 \longrightarrow \bar{n}_I = \begin{bmatrix} -0'0685 \\ 0'0633 \\ 0'9956 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = 0 \ KN/m^2 \longrightarrow \bar{n}_{II} = \begin{bmatrix} 0'6785 \\ 0'7346 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{III} = -8'5 \ KN/m^2 \longrightarrow \bar{n}_{III} = \begin{bmatrix} 0'7314 \\ -0'6755 \\ 0'0933 \end{bmatrix}$$

5) Desplazamiento según z de B $\left(x = \frac{1}{6}, y = \frac{\sqrt{3}}{6}, z = 12\right)$

$$w = \frac{M_T}{GJ} f(x,y) = \frac{46'19 \ M_z}{G} \cdot f(x,y) = 3'2 \cdot 10^{-6} \left(3xy^2 - x^3\right)$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas, se tiene:

$$\boxed{w^B = 1'185 \cdot 10^{-4} \ mm}$$

6) Validez de la fórmula de Resistencia de Materiales para las tensiones tangenciales por cortante en $y = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $z = 12$.

Según R.M: $\tau_{yz} = \dfrac{Q \cdot M_{est}}{I \cdot b} = 61'58 \ KN/m^2 = cte$ en la recta

No cumple las condiciones de contorno, porque no es nula en los bordes

ver: Torsión por Saint Venant

Torsión 16.

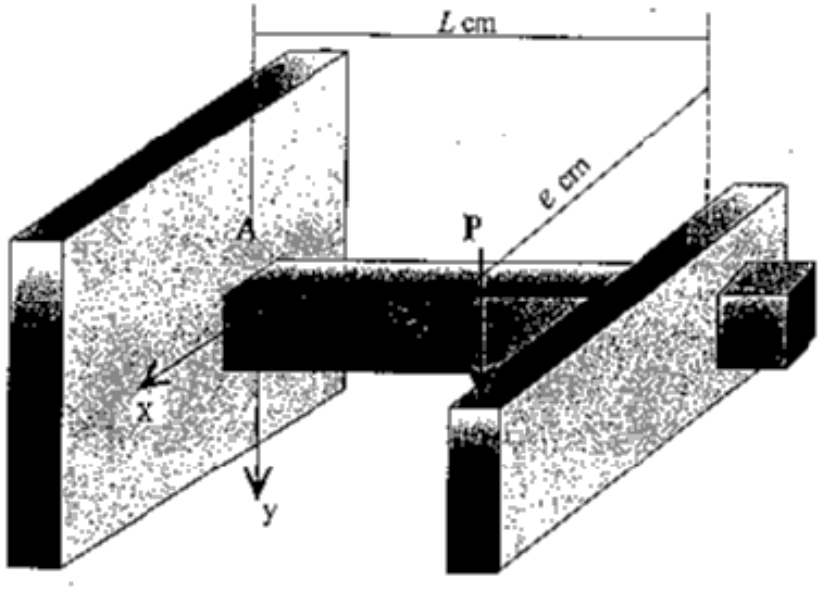
Un prisma recto de sección cuadrada de a = 20 cm de lado y L = 80 cm de longitud está empotrado en un extremo y libre en el otro. En el extremo libre se le aplica una carga P con una excentricidad de e = 80 cm, por medio de una pieza rígida, como se muestra en la figura. Las tensiones máximas admisibles en el material son 140000 kN/m² en tracción o compresión, y 100000 kN/m² en cortante. Si se acepta para la flexión la solución de tensiones de Resistencia de Materiales y para la torsión las fórmulas de la Elasticidad, se pide:

1. Referidas a los ejes x, y, z de la figura, coordenadas del punto o puntos que limitan el valor de P.

2. Máximo valor admisible de P, en kN.

3. Valor y dirección de la máxima tracción en uno de los puntos del apartado 1). Se hará un croquis con los valores de los ángulos que forma la dirección de esa tracción con las paralelas a los ejes coordenados de la figura.

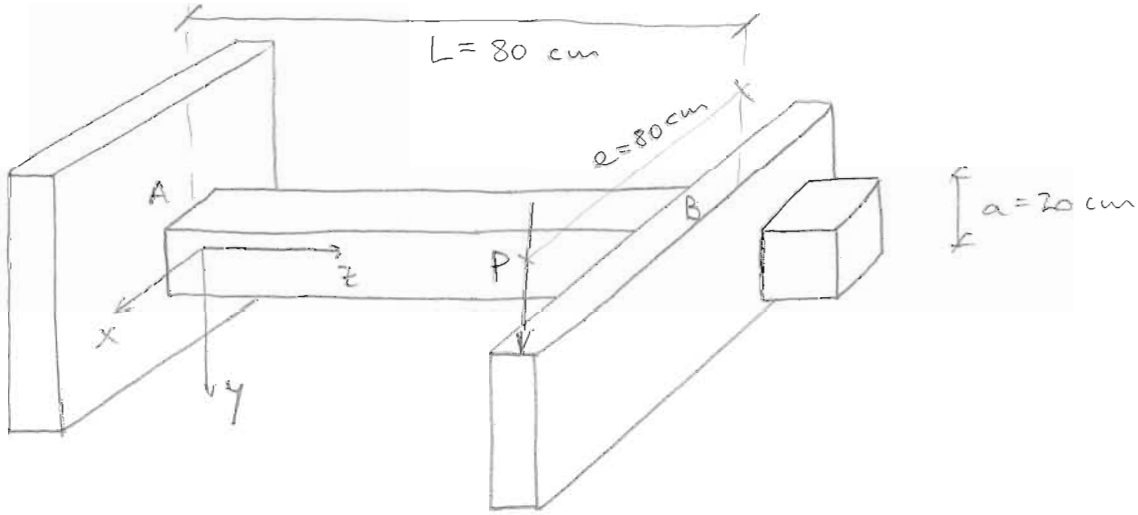
(Examen de junio de 2002)



Enunciado: EXAMEN JUNIO 2002 Torsión 16 (60')

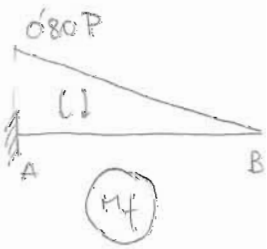
Un prisma recto de sección cuadrada de a=20 cm de lado y L=80 cm de longitud, está empotrado en un extremo y libre en el otro. En el extremo libre se aplica una carga P con una excentricidad de e=80 cm, por medio de una pieza rígida, como se muestra en la figura. Las tensiones máximas admisibles en el material son 140000 KN/m² en tracción o compresión, y 100000 KN/m² en cortante. Si se acepta para la flexión la solución de tensiones de Resistencia de Materiales y para la torsión las fórmulas de la Elasticidad, se pide:

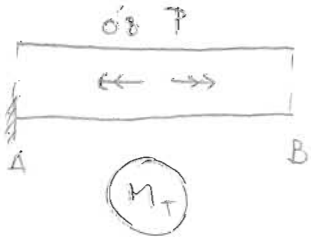
1) Referidas a los ejes x, y, z de la figura, coordenadas del punto o puntos que limitan el valor de P.
2) Máximo valor admisible de P, en KN.
3) Valor y dirección de la máxima tracción en uno de los puntos del apartado 1. Se hará un croquis con los valores de los ángulos que forma la dirección de esa tracción con las paralelas a los ejes coordenados de la figura.

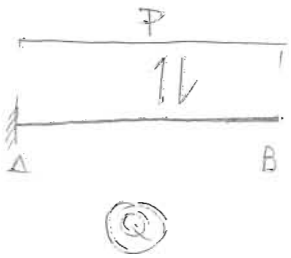


Resolución:

1) La carga P produce momentos flectores, cortantes y torsores







Por lo tanto, las máximas tensiones se producirán en el empotramiento

$$\left| \begin{array}{l} M_f = 0'80 \cdot P \\ M_T = 0'80 \cdot P \\ Q = P \end{array} \right.$$

• <u>Momento flector:</u> Aplicando la fórmula de Navier:

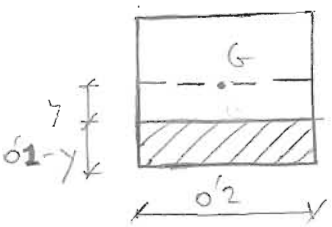
$$\sigma_z = \frac{M \cdot y}{I} \qquad \left| \begin{array}{l} M = -0'80 \cdot P \\ I = \frac{1}{12} 0'20^4 = 1'333 \cdot 10^{-4} \ m^4 \end{array} \right.$$

Sustituyendo:

$$\sigma_z = \frac{-0'80 \cdot P \cdot y}{1'333 \cdot 10^{-4}} = -6000 \cdot P \cdot y$$

• <u>Cortante:</u> Aplicando la fórmula de Coliquon

$$\tau_{yz} = \frac{Q \cdot M_{est}}{I \cdot b} \qquad \left| \begin{array}{l} Q = P \\ M_{est} = (0'1 - y) \cdot 0'2 \cdot \left[y + \frac{0'1 - y}{2} \right] = 0'001 - 0'1 \cdot y^2 \\ I = 1'333 \cdot 10^{-4} \ m^4 \\ b = 0'2 \ m \end{array} \right.$$



Sustituyendo: $$\tau_{yz} = \frac{P \cdot (0'001 - 0'1 \cdot y^2)}{1'333 \cdot 10^{-4} \cdot 0'2} = 37'5094 \cdot P - 3750'94 \cdot P \cdot y^2$$

• <u>Torsión:</u>

Las tensiones por torsión serán:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \ kN/m^2$$

Suponemos la siguiente función de tensiones de Prandtl:

$$\phi = k(x^2 - 0'1^2)(y^2 - 0'1^2) = k(x^2y^2 - 0'01y^2 - 0'01x^2 + 0'0001)$$

Hay que comprobar: $\left| \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = cte = -2G\alpha \\ \phi_\Gamma = 0 \quad \checkmark \end{array} \right.$

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] \phi = -2G\cdot\alpha$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2Kxy^2 - 0'02\,Kx \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2Ky^2 - 0'02\,K$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2Kx^2y - 0'02\,Ky \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Kx^2 - 0'02\,K$$

Por tanto:

$$\nabla^2 \phi = 2Ky^2 - 0'02\,K + 2Kx^2 - 0'02\,K = 2K\left(x^2+y^2-0'02\right) \neq cte$$

Al no cumplirse esta condición se sabe que no es función exacta, pero se puede minimizar el error usando Rayleigh-Ritz

$$\left|\begin{array}{l} V = U - W \\ U = \dfrac{1}{2G}\displaystyle\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega \\ W = 2\cdot\alpha\cdot\displaystyle\iint_\Omega \phi\, d\Omega \end{array}\right.$$

$$U = \frac{1}{2G}\iint_\Omega \left[\left(2Kxy^2 - 0'02\,Kx\right)^2 + \left(2Kx^2y - 0'02\,Ky\right)^2 d\Omega =\right.$$

$$= \frac{4K^2}{2G}\int_{x=-0'1}^{x=0'1}\int_{y=-0'1}^{y=0'1}\left[x^2\cdot y^4 + x^4y^2 + 0'0001\,x^2 + 0'0001\cdot y^2 - 0'04\,x^2y^2\right] dy\,dx =$$

$$= \frac{2K^2}{3G}\int_{-0'1}^{0'1}\left[2\cdot 10^{-3}x^4 - 8\cdot 10^{-6}x^2 + 2\cdot 10^{-7}\right] dx =$$

$$= \frac{2K^2}{3G}\left[\frac{2\cdot 10^{-3}x^5}{5} - \frac{8\cdot 10^{-6}x^3}{3} + 2\cdot 10^{-7}\cdot x\right]\Bigg|_{-0'1}^{0'1} = \frac{64\cdot 10^{-7}\cdot K^2}{225\cdot G}$$

$$W = 2\cdot\alpha\cdot\iint \phi\, d\Omega = 2\alpha\int_{x=-0'1}^{x=0'1}\int_{y=-0'1}^{y=0'1} K\left[x^2y^2 - 0'01\,y^2 - 0'01\,x^2 + 0'0001\right] dy\,dx =$$

$$= \frac{8K\alpha}{3}\int_{-0'1}^{0'1}\left[-10^{-3}x^2 + 10^{-5}\right] dx = \frac{32\cdot K\alpha\cdot 10^{-6}}{9}$$

Entonces:

$$V = U - W = \frac{64\cdot 10^{-7}K^2}{225\,G} - \frac{32K\alpha\cdot 10^{-6}}{9}$$

Minimizando la energía potencial total:

$$\frac{\partial V}{\partial K} = 0 \rightarrow \frac{128 \cdot 10^{-7} K}{225\, G} - \frac{32 \cdot 10^{-6} \alpha}{9} = 0$$

$$K = 62'5\, G \alpha$$

Como $M_T = 2 \iint_\Omega \phi \, d\Omega = G \cdot J \cdot \alpha$

$$\frac{32 \cdot 10^{-6}\, K}{9} = G \cdot J \cdot \alpha$$

Sustituyendo K:

$$\frac{32 \cdot 10^{-6} \cdot 62'5 \cdot \cancel{G} \cdot \cancel{\alpha}}{9} = \cancel{G} \cdot J \cdot \cancel{\alpha} \rightarrow \boxed{J = 2'222 \cdot 10^{-4}\, m^4}$$

Se puede comparar este valor con la fórmula aproximada:

$$J = \frac{(\text{Área})^4}{4\pi^2 \cdot I_{POLAR}} = \frac{2'56 \cdot 10^{-6}}{4\pi^2 \cdot 2 \frac{1}{12} 0'2^4} = \frac{2'56 \cdot 10^{-6}}{1'053 \cdot 10^{-2}} = 2'432 \cdot 10^{-4}\, m^4$$

Y el valor exacto es:

$$J = \frac{1}{6} \cdot 0'2^4 = 2'667 \cdot 10^{-4}\, m^4$$

Las tensiones debidas a torsión serán:

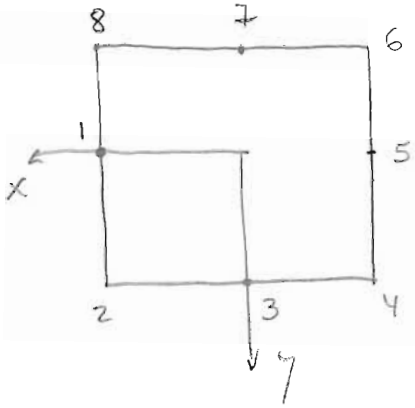
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad KN/m^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{xz}^T = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = K\left[2 \cdot x^2 \cdot y - 0'02\, y\right] = 125\, G \alpha \left[x^2 \cdot y - 0'01 \cdot y\right] \\ \tau_{yz}^T = \dfrac{-\partial \phi}{\partial x} = K\left[2 x y^2 - 0'02\, x\right] = 125\, G \alpha \left[-x \cdot y^2 + 0'01 \cdot x\right] \end{array} \right.$$

Como $\alpha = \dfrac{M_T}{G \cdot J}$ y $J = 2'222 \cdot 10^{-4}$, sustituyendo queda:

$$\left| \begin{array}{l} \tau_{xz}^T = 562500 \cdot M_T \left[x^2 y - 0'01 \cdot y\right] \\ \tau_{yz}^T = 562500\, M_T \left[-x \cdot y^2 + 0'01 \cdot x\right] \end{array} \right.$$

Los puntos más conflictivos serán los extremos:



$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 450000\,x^2 y - 4500 \cdot y \\ & 0 & -450000 \cdot x \cdot y^2 + 4500 \cdot x + 37'51 - 3751 \\ (S) & & -6000\,y \end{bmatrix}$$

PUNTO 1: $(x = 0'1,\ y = 0)$

$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 487'51 \\ 0 & 487'51 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 487'51\,P \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -487'51\,P \\ \tau_{MAX} = 487'51\,P \end{array} \right.$$

Igualando a las máximas tensiones admisibles

$487'51\,P = 140000 \rightarrow P = 287'17$ KN

$487'51\,P = 100000 \rightarrow P = 205'12$ KN

PUNTO 2: $(x = 0'1,\ y = 0'1)$

$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -600 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -600\,P \rightarrow P = 233'33 \text{ KN} \\ \tau_{MAX} = 300\,P \rightarrow P = 333'33 \text{ KN} \end{array} \right.$$

PUNTO 3: $(x = 0,\ y = 0'1)$

$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & -450 \\ 0 & 0 & 0 \\ -450 & 0 & -600 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 240'83\,P \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -840'83\,P \rightarrow P = 166'5 \text{ KN} \\ \tau_{MAX} = 540'83\,P \rightarrow P = 184'9 \text{ KN} \end{array} \right.$$

PUNTO 4: $(x = -0'1,\ y = 0'1)$

$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -600 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{igual que el punto 2}$$

PUNTO 5: $(x = -0'1,\ y = 0)$

$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -412'49 \\ 0 & -412'49 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 412'49\,P \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -412'49\,P \\ \tau_{MAX} = 412'49\,P \rightarrow P = 242'43 \text{ KN} \end{array} \right.$$

PUNTO 6: $(x = -0'1,\ y = -0'1)$

$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Igual que el punto 2}$$

PUNTO 7: $(x = 0,\ y = -0'1)$

$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 450 \\ 0 & 0 & 0 \\ 450 & 0 & 600 \end{bmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 840'83\,P \rightarrow P = 166'5 \text{ KN} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -240'83\,P \\ \tau_{MAX} = 540'83\,P \rightarrow P = 184'9 \text{ KN} \end{array} \right.$$

PUNTO 8: $(x = 0'1,\ y = -0'1)$

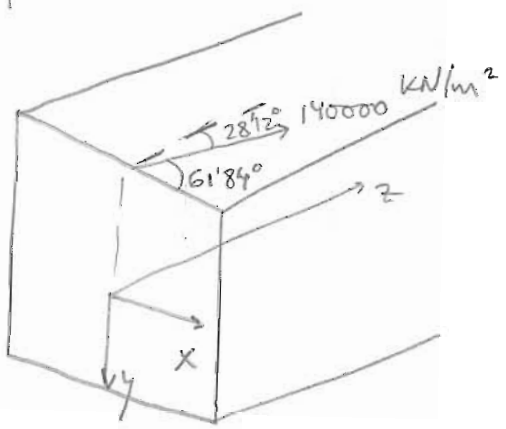
$$\underline{T} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Igual que 2.}$$

Por lo tanto, los puntos conflictivos son el 3 y el 7.

2) $\boxed{P = 166'5 \text{ KN}}$

3) La máxima tracción se produce en el punto 7. Las direcciones de las tensiones principales son: $\bar{n}_1 = \begin{bmatrix} 0'472 \\ 0 \\ 0'882 \end{bmatrix}$ $\bar{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{n}_3 = \begin{bmatrix} 0'88 \\ 0 \\ -0'4 \end{bmatrix}$

Croquis:



arc cos 0'472 = 61'84°
arc cos 0'882 = 28'12°

NOTA: Torsión en sección cuadrada mediante Rayleigh-Ritz

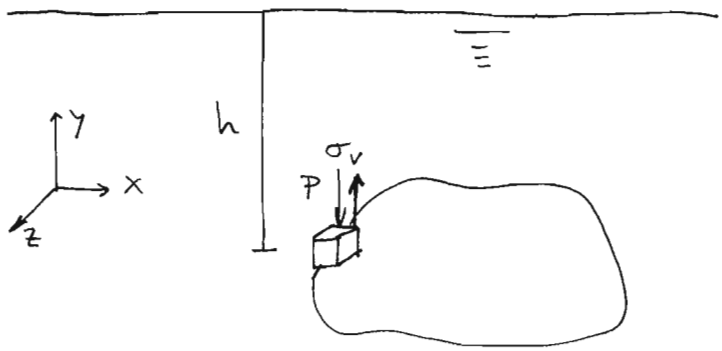
Enunciado (Práctica complementaria curso 99-00) Varios 1

En un punto de un sólido que está sumergido en el mar se han medido las deformaciones según las direcciones x, y, z, que se indican a continuación:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -3 \cdot 10^{-5}$$
$$\varepsilon_y = -6'1 \cdot 10^{-4}$$

Las características del material son: $E = 2 \cdot 10^7$ kN/m², $\nu = 0'20$. El peso específico del agua de mar es $\gamma_w = 10'29$ kN/m³. Se pide:

1) Determinar la profundidad a la que se encuentra dicho punto del sólido.
2) Determinar qué presión vertical σ_v, adicional a la hidrostática está actuando sobre el plano horizontal que contiene al punto.
3) Valor del módulo de compresión del material.



$P = \gamma \cdot h$

Resolución:

1) Utilizando las ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x$$
$$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y$$
$$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8'333 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 5'555 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -0'00067$$

Por tanto:

$$\sigma_x = -4222 \text{ kN/m}^2$$
$$\sigma_y = -13889 \text{ kN/m}^2$$
$$\sigma_z = -4222 \text{ kN/m}^2$$

Entonces:

$$\sigma_x = -\gamma \cdot h = -10'29 \ KN/m^3 \cdot h = -4222 \ KN/m^2$$

$$\boxed{h = 410'32 \ m}$$

2)

$$\sigma_y = -\gamma \cdot h + \sigma_v \Rightarrow \sigma_v = \sigma_y + \gamma \cdot h$$

$$\boxed{\sigma_v = -18111 \ KN/m^2}$$

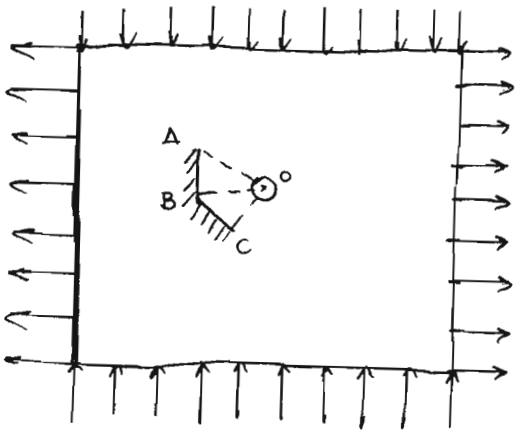
3)

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 1'111 \cdot 10^7 \ KN/m^2}$$

NOTA: Problema de presión hidrostática.

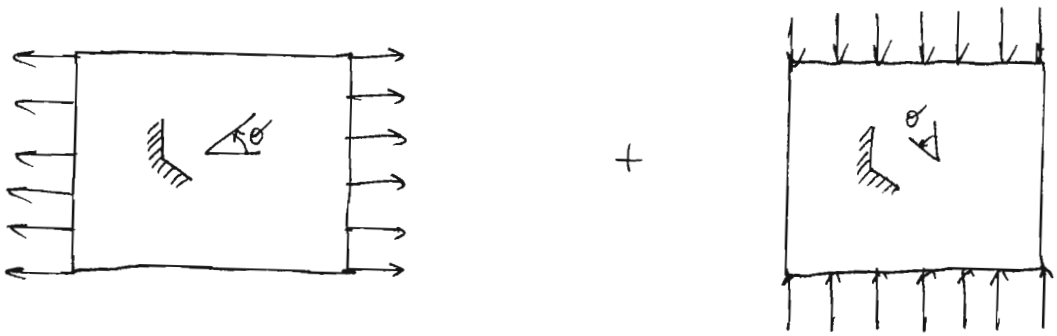
Enunciado (extraído de BREVELAS): Varios 2

Una chapa plana de 3 m de lado, cuadrada, tiene en su centro un agujero circular de 3 cm de radio. Sobre el contorno de la chapa actúa una tracción uniforme $\sigma_x = 76'8$ MPa y una compresión uniforme $\sigma_y = -76'8$ MPa. Dados los puntos A, B y C señalados en la figura con $OA = 6\sqrt{2}$ cm, $OB = 6$ cm y $OC = 3\sqrt{2}$ cm, se piden los valores, signos y direcciones de las tensiones totales en A, B y C sobre las partes rayadas de los planos AB y BC.



Resolución:

Se puede dividir en dos estados. Hay que tener cuidado con los orígenes de los ejes.



ESTADO 1 ESTADO 2

- Estado 1:

$S = 76'8$ MPa

$a = 0'03$ m

En $A\left(0'06\sqrt{2},\ 135°\right) \Rightarrow \underline{T_A}^{1} = \begin{pmatrix} 33'6 & 46'2 \\ 46'2 & 43'2 \end{pmatrix}$ en MPa

$\xi = 0'3536 \qquad S = 76'8$ MPa

Utilizando las fórmulas:

$$\xi = \frac{a}{r}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2} S \left[1 - \xi^2 + \left(1 + 3\xi^4 - 4\xi^2\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} S \left[1 + \xi^2 - \left(1 + 3\xi^4\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2} S \left(1 - 3\xi^4 + 2\xi^2\right) \operatorname{sen} 2\theta$$

En $B\left(0'06,\ 180°\right) \Rightarrow \underline{T_B}^{1} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 2'4 \end{pmatrix}$ en MPa

$\xi = 0'5$

En $C\left(0'03\sqrt{2},\ 225°\right) \Rightarrow \underline{T_C}^{1} = \begin{pmatrix} 19'2 & -48 \\ -48 & 57'6 \end{pmatrix}$ en MPa

$\xi = 0'70711$

- Estado 2:

$S = -76'8$ MPa

$a = 0'03$ m

En $A\left(0'06\sqrt{2},\ 45°\right) \Rightarrow \underline{T_A}^{2} = \begin{pmatrix} -33'6 & 46'2 \\ 46'2 & -43'2 \end{pmatrix}$ en MPa

$\xi = 0'3536$

En $B\left(0'06,\ 90°\right) \Rightarrow \underline{T_B}^{2} = \begin{pmatrix} -21'6 & 0 \\ 0 & -93'6 \end{pmatrix}$ en MPa

$\xi = 0'5$

En $C\left(0'03\sqrt{2},\ 135°\right) \Rightarrow \underline{T_C}^{2} = \begin{pmatrix} -19'2 & -48 \\ -48 & -57'6 \end{pmatrix}$ en MPa

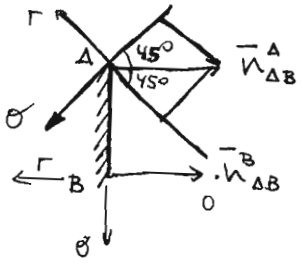
$\xi = 0'70711$

Los tensores en cada punto se pueden sumar, ya que no dependen de σ (en MPa):

$$\underline{T_A} = \begin{pmatrix} 0 & 92'4 \\ 92'4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{T_B} = \begin{pmatrix} 14'4 & 0 \\ 0 & -91'2 \end{pmatrix} \qquad \underline{T_C} = \begin{pmatrix} 0 & -96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que ver las tensiones sobre los planos AB y BC.

$$\bar{n}^{A}_{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$\bar{n}^{B}_{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\bar{t}^{AB}_{A} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 0 & 92'4 \\ 92'4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -65'337 \\ -65'337 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{AB}_{A} = \bar{n}^{T} \cdot \bar{t}^{AB}_{A} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -65'337 \\ -65'337 \end{pmatrix} = 92'4 \text{ MPa}$$

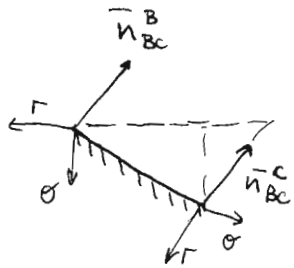
$$\tau^{AB}_{A} = \bar{n}^{T}_{*} \cdot \bar{t}^{AB}_{A} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -65'337 \\ -65'337 \end{pmatrix} = 0 \text{ MPa}$$

$$\bar{t}^{AB}_{B} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 14'4 & 0 \\ 0 & -91'2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14'4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{AB}_{B} = \bar{n}^{T} \cdot \bar{t}^{AB}_{B} = (-1, 0) \begin{pmatrix} -14'4 \\ 0 \end{pmatrix} = 14'4 \text{ MPa}$$

$$\tau^{AB}_{B} = \bar{n}^{T}_{*} \cdot \bar{t}^{AB}_{B} = (0, -1) \begin{pmatrix} -14'4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ MPa}$$

$$\bar{t}^{BC}_{B} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 14'4 & 0 \\ 0 & -91'2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10'182 \\ 64'488 \end{pmatrix}$$



$$\sigma^{BC}_{B} = \bar{n}^{T} \cdot \bar{t}^{BC}_{B} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -10'182 \\ 64'488 \end{pmatrix} = -38'4 \text{ MPa}$$

$$\tau^{BC}_{B} = \bar{n}^{T}_{*} \cdot \bar{t}^{BC}_{B} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -10'182 \\ 64'488 \end{pmatrix} = 52'8 \text{ MPa}$$

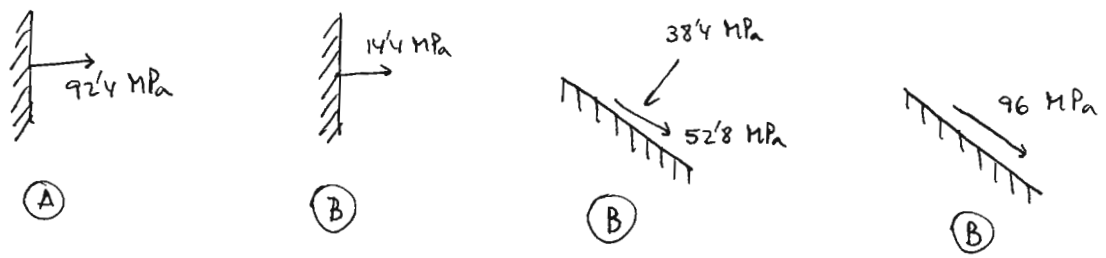
En C:

$$\bar{t}_c^{BC} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 0 & -96 \\ -96 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_c^{BC} = \bar{n}^T \cdot \bar{t}_c^{BC} = (-1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \end{pmatrix} = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_c^{BC} = \bar{n}_*^T \cdot \bar{t}_c^{BC} = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \end{pmatrix} = 96 \text{ MPa}$$

Gráficamente:



NOTA: Problema de placa con agujero. Es interesante la parte última, en la que se juega bastante con ejes r-θ.

Varios 3.

Sobre la superficie del macizo semiinfinito de la Figura A actúa una carga vertical uniforme de 300 kN/m² distribuida sobre una faja AA' de 6 m de ancho. Se pide obtener las tensiones principales en valor y dirección en los puntos B y C. Se recuerda que, en tensión plana, la función de tensiones correspondiente al caso de carga que se representa en la Figura B es $\Phi = k \cdot r^2 \cdot \theta$.

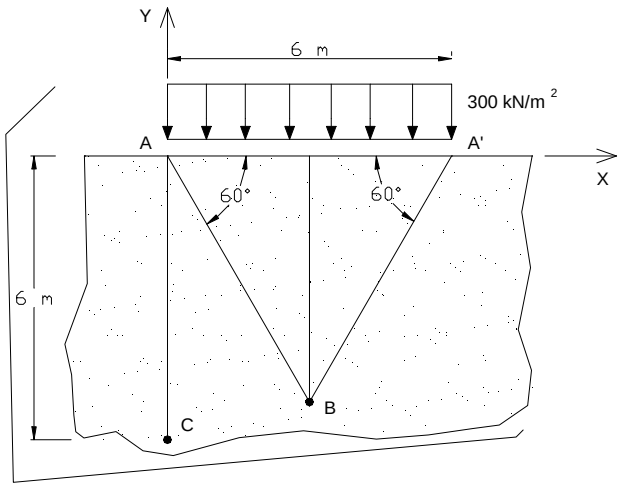


Figura A

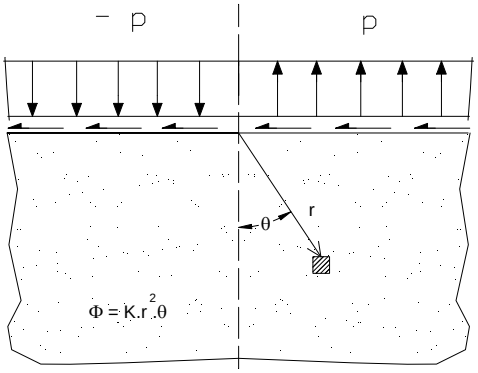


Figura B

Enunciado: Varios 3 (45')

Sobre la superficie del macizo semiinfinito de la Figura A actúa una carga vertical uniforme de 300 KN/m² distribuida sobre una faja AA' de 6 metros de ancho. Se pide obtener las tensiones principales en valor y dirección en los puntos B y C. Se recuerda que, en tensión plana, la función de tensiones correspondiente al caso de carga que se representa en la Figura B es $\phi = K \cdot r^2 \cdot \theta$.

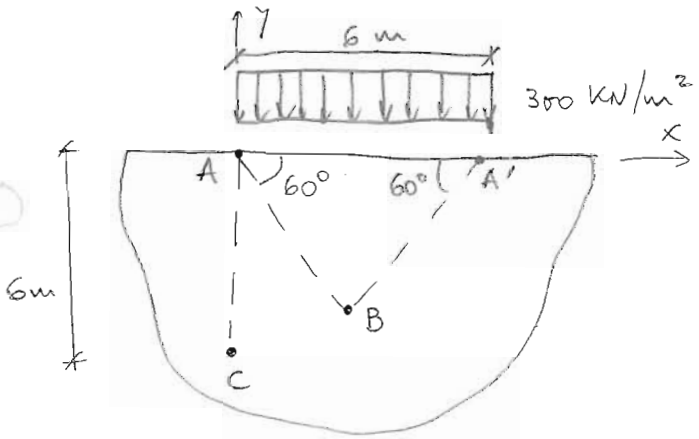


Figura A

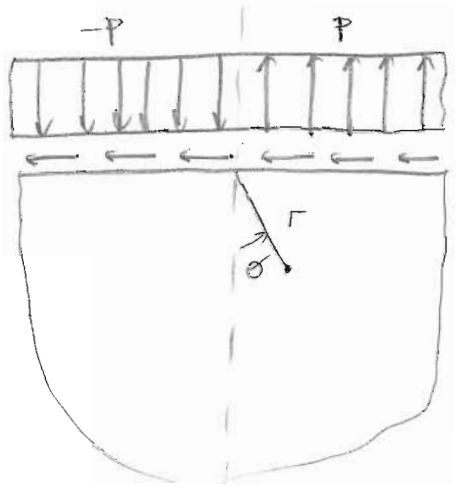
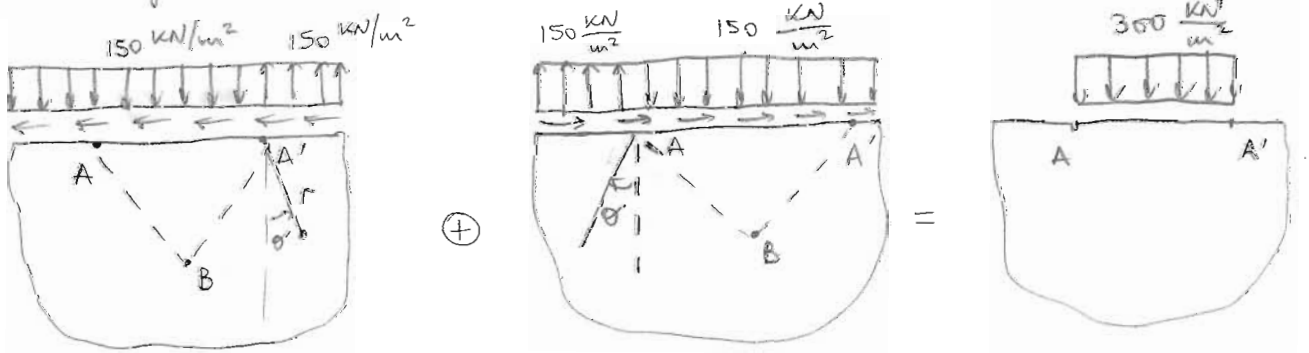


Figura B

Resolución:

El estado representado en la Figura A es suma de los dos estados siguientes:



ESTADO (I) ESTADO (II) ESTADO TOTAL

Por lo tanto, los valores del estado total resultan de sumar los valores para cada punto obtenidos en los dos estados.

Las tensiones correspondientes al caso de la Figura B son:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 2K\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2K\theta \quad \text{en } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sigma_\theta = p \rightarrow 2K\theta = 2K\frac{\pi}{2} = p \rightarrow K = \frac{p}{\pi}$$

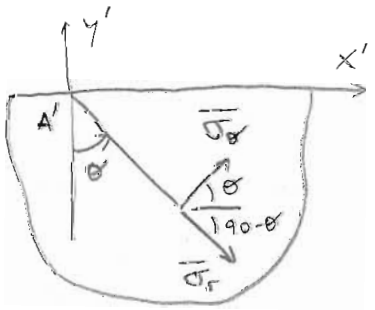
$$\tau_{r\theta} = \frac{-\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right] = -K = \frac{-p}{\pi}$$

Por lo tanto, el tensor de tensiones en un punto general será:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{2p\theta}{\pi} & \frac{-p}{\pi} \\ \frac{-p}{\pi} & \frac{2p\theta}{\pi} \end{bmatrix}$$

Para poder sumar los dos estados es preciso que estén referidos a la misma base. Tomaremos como base final los ejes cartesianos (x, y) con origen en A.

ESTADO (I):



$$G = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}'_{(I)} = G^T \cdot \underline{T}_{(I)} \cdot G = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2p\theta}{\pi} & \frac{-p}{\pi} \\ \frac{-p}{\pi} & \frac{2p\theta}{\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}'_{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{2p\theta}{\pi} - \frac{p}{\pi}\operatorname{sen} 2\theta & \frac{p}{\pi}\cos 2\theta \\ \frac{p}{\pi}\cos 2\theta & \frac{2p\theta}{\pi} + \frac{p}{\pi}\operatorname{sen} 2\theta \end{bmatrix}$$

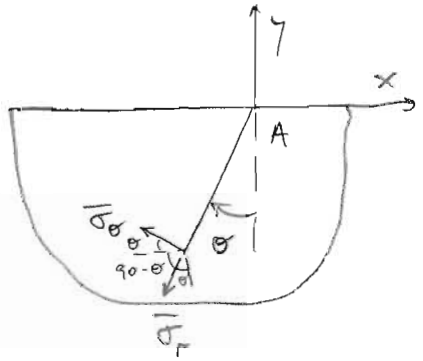
• Punto B: $\left(r = 6, \theta = \frac{-\pi}{6}\right)$ $p = 150$

$$\underline{T}'^{B}_{(I)} = \begin{bmatrix} -8'65 & 23'873 \\ 23'873 & -91'35 \end{bmatrix} \quad KN/cm^2$$

• Punto C : $\left(r = 6\sqrt{2},\ \theta = -\frac{\pi}{4}\right)$ $p = 150$

$$\underline{T}'^{C}_{(I)} = \begin{bmatrix} -27'254 & 0 \\ 0 & -122'746 \end{bmatrix} \ KN/m^2$$

ESTADO (II):



$$G^* = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}'_{(II)} = G^{*T} \cdot \underline{T}_{(II)} \cdot G^* = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2p\theta}{\pi} & \frac{-p}{\pi} \\ \frac{-p}{\pi} & \frac{2p\theta}{\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}'_{(II)} = \begin{bmatrix} \frac{2p\theta}{\pi} - \frac{p}{\pi}\operatorname{sen}2\theta & \frac{-p}{\pi}\cos 2\theta \\ -\frac{p}{\pi}\cos 2\theta & \frac{2p\theta}{\pi} + \frac{p}{\pi}\operatorname{sen}2\theta \end{bmatrix}$$

• Punto B : $\left(r = 6,\ \theta = -\frac{\pi}{6}\right)$ $p = 150$

$$\underline{T}'^{B}_{(II)} = \begin{bmatrix} -8'65 & -23'873 \\ -23'873 & -91'35 \end{bmatrix} \ KN/m^2$$

• Punto C : $\left(r = 6,\ \theta = 0\right)$ $p = 150$

$$\underline{T}'^{C}_{(II)} = \begin{bmatrix} 0 & -47'746 \\ -47'746 & 0 \end{bmatrix} \ KN/m^2$$

El estado final será la suma de los estados (I) y (II)

ESTADO FINAL:

- Punto B:

$$\underline{T}'^{B} = \begin{bmatrix} -17'3 & 0 \\ 0 & -182'7 \end{bmatrix} \frac{KN}{m^2}$$

Por tanto, las tensiones y direcciones principales son:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_I = -17'3 \ KN/m^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_{II} = -182'7 \ KN/m^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

- Punto C:

$$\underline{T}'^{C} = \begin{bmatrix} -27'254 & -47'746 \\ -47'746 & -122'746 \end{bmatrix} \frac{KN}{m^2}$$

Y las tensiones y direcciones principales son:

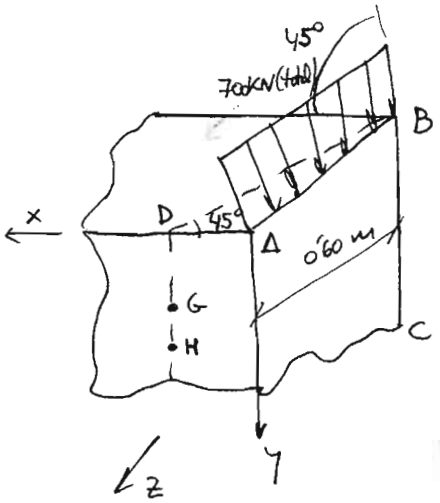
$$\left| \begin{array}{l} \sigma_I = -7'477 \ KN/m^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0'9239 \\ -0'3826 \end{bmatrix} \\ \sigma_{II} = -142'523 \ KN/m^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0'3826 \\ 0'9239 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

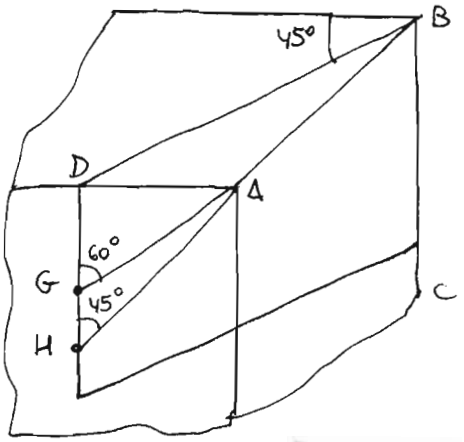
NOTA: Tensiones en polares con cambio de base a cartesianas.

Enunciado (extraído de BREVELAS): Varios y

Una pieza prismática en forma de ángulo recto de 0'60 m de espesor es suficientemente grande como para admitir que la sustentación no influye en el estado tensional de la región en estudio. En una arista AB actúa una fuerza de 700 KN distribuida uniformemente en AB y orientada como se indica en la figura. Se pide:

1) Ley de variación de la tensión total a lo largo de la arista BC, sobre el plano BCD definido en la figura.
2) Magnitud y dirección de la tensión total sobre dicho plano en sus puntos D, G y H.

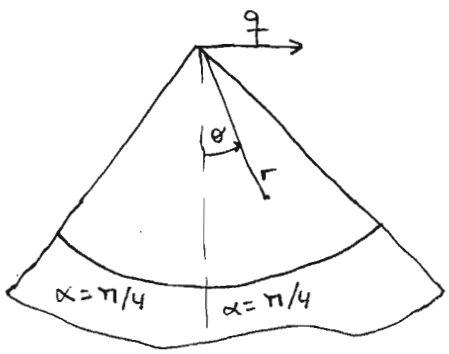




Resolución:

1) La carga es $q = \dfrac{700\ KN}{0'60\ m} = 1166'7\ KN/m$

Por tanto, el tensor de tensiones será:



$$T = \frac{-2q}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

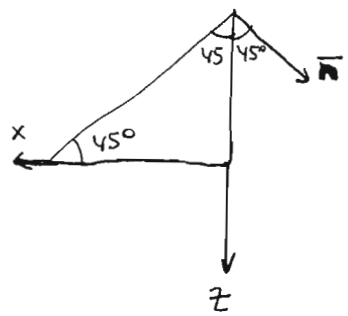
Por tanto:

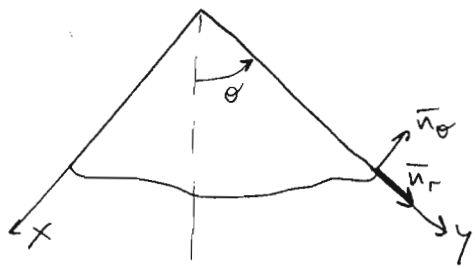
$$T = \frac{-2 \cdot 1166'7}{2\frac{\pi}{4} - 1} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4'088 \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (MPa)}$$

En la arista BC $(\theta = 45^\circ)$. $r = y$.

$$T_{BC} = \frac{-2'8906}{y} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector normal al plano BCD es $\bar{n}^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ en coord. ortogonales





La matriz de cambio de base es:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

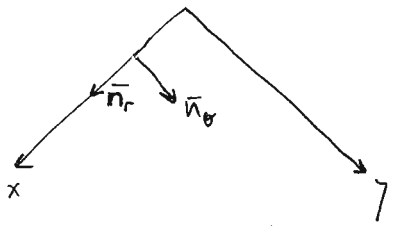
$$\underline{T}^* = G \cdot \underline{T} \cdot G^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2'8906/y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2'8906/y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2'8906/y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

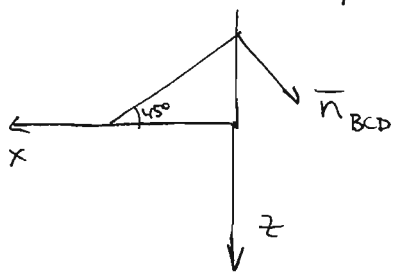
$$\bar{t}^* = \underline{T}^* \cdot \bar{n} = \frac{-2'8906}{y} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} = 2'044 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ MPa}$$

2) • En $D\left(0'6, -\frac{\pi}{4}, 0\right)_{r\theta z} = \left(0'6, 0, 0\right)_{xyz}$

$$\underline{T_D} = 4'818 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r\theta z} = 4'818 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{xyz}$$



$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{T^*} = \underline{T}$$



$$\bar{n}_{BCD} = \begin{pmatrix} -0'7071 \\ 0 \\ 0'7071 \end{pmatrix}$$

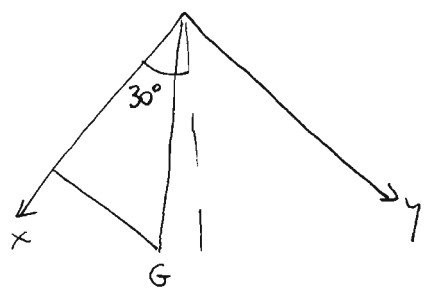
Por tanto:

$$\bar{t}_D^{BCD} = \underline{T_D} \cdot \bar{n}_{BCD} = 4'818 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0'7071 \\ 0 \\ 0'7071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3'407 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

(Magnitud 3'407 MPa, dir. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

• En $G\left(0'693, \frac{-\pi}{6}, 0\right)_{r\theta z} = \left(0'6, 0'3464, 0\right)_{xyz}$

$$\underline{T_G} = 1'527 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r\theta z}$$



Como hay que girar el tensor -30°

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T_G^*} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1'527 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1'527 \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1'527 \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{xyz}$$

Por tanto:

$$\bar{t}_G^{BCD} = 1'527 \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0'7071 \\ 0 \\ 0'7071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0'81 \\ -0'468 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\left(\text{Magnitud} = 0'9355 \text{ MPa}, \text{ Dirección } \begin{pmatrix} -0'866 \\ -0'50 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ángulo 30° con el eje x y está contenid en un plano paralelo a x

- En H $(0'849, 0, 0)$ ~~MPa~~

$$\underline{T}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{t}_H^{BCD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

NOTA: Problema de carga repartida en esquina, en polares, con cambio de base a cartesianas.

Varios 5.

Un cilindro circular delgado de radio R = 10 m, espesor unidad y peso específico γ = 25 kN/m^3 reposa sobre un plano horizontal rígido.

Se pide:

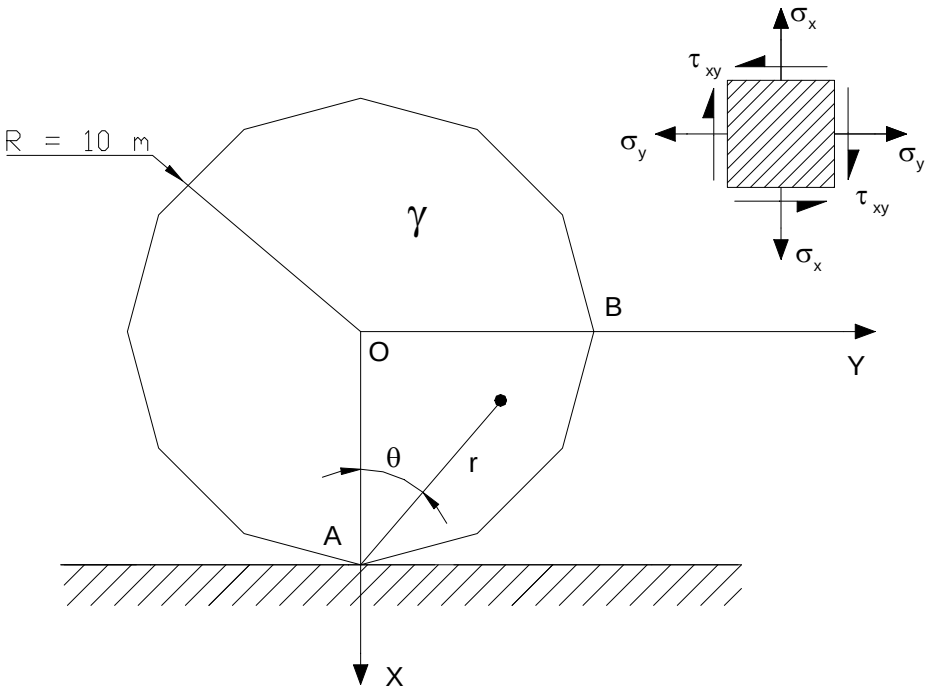
1. Mostrar que el estado tensional se puede obtener por superposición de las dos funciones de tensión siguientes

$$\Phi_1 = A \cdot r \cdot \theta \cdot \text{sen}\,\theta \qquad \Phi_2 = B \cdot x^3 + C \cdot (x^2 + y^2) + D \cdot x \cdot y^2$$

2. Calcular el valor de las constantes A, B, C, D.

3. Ley de tensiones a lo largo de los diámetros horizontal y vertical.

4. Determinar la fuerza y el momento resultantes, respecto al punto A, de las tensiones que actúan sobre el radio horizontal OB.



Enunciado: Varios 5 (60')

Un cilindro circular de radio R, de espesor delgado (unidad) y con peso específico γ se encuentra reposando en un plano perfectamente rígido y horizontal. Se pide:

1) Mostrar que el estado tensional se puede obtener por superposición de las dos funciones de tensión siguientes:

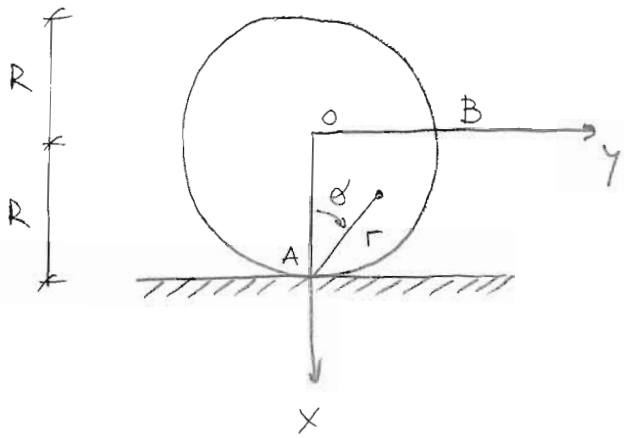
$$\phi_1 = A \cdot r \cdot \theta \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad \phi_2 = Bx^3 + C(x^2+y^2) + Dxy^2$$

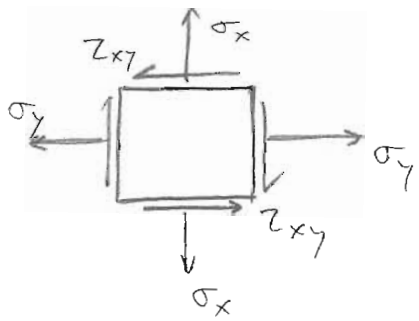
Los sistemas coordenados (r,θ) y (x,y) son los de la figura.

2) Calcular el valor de las constantes A, B, C y D.

3) Ley de tensiones, indicando los valores cada 0'25 R, en los diámetros horizontal y vertical.

4) Determinar la fuerza y el momento resultantes, respecto al punto A, de las tensiones que actúan sobre el radio horizontal OB.





DATOS: $R = 10\ m$, $\gamma = 25\ \frac{kN}{m^3}$

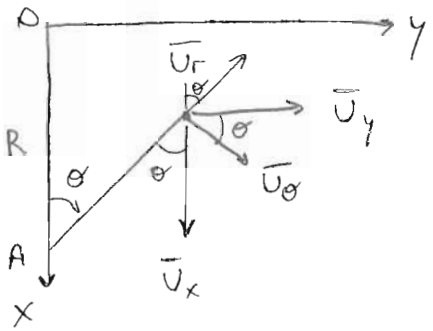
Resolución:

1) y 2) Este es un problema de tensión plana, ya que:

- Pequeño espesor.
- Fuerzas contenidas en el plano medio

Se debe verificar:
- Equilibrio interno → automático
- Compatibilidad → función biarmónica
- Condiciones de contorno.

Para comprobar si la función $\phi_{TOTAL} = \phi_1 + \phi_2$ es solución de nuestro problema, habría que sumar ambas, pero en la misma base de referencia. Escogemos como base común (x, y).



$$G = \begin{array}{cc} \bar{U}_x & \bar{U}_y \\ \end{array}$$
$$G = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{T_1}^* = G^T \cdot \underline{T_1} \cdot G$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \qquad \phi_1 = A \cdot r \cdot \theta \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{A\theta \operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{2A\cos\theta}{r} - \frac{A\theta\operatorname{sen}\theta}{r} = \frac{2A\cos\theta}{r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right] = 0$$

Por lo tanto:

$$T_1^* = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2A\cos\theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2A\cos^3\theta}{r} & \frac{-2A\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{r} \\ \frac{-2A\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{r} & \frac{2A\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

(en la base x, y)

y la función $\phi_2 = Bx^3 + C(x^2 + y^2) + Dxy^2$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2C + 2Dx$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6Bx + 2C$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - f_x \cdot y - f_y \cdot x = -2Dy - \gamma \cdot y$$

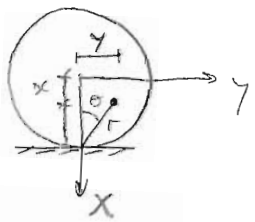
Entonces:

$$\underline{T_2} = \begin{bmatrix} 2C + 2Dx & -2Dy - \gamma y \\ -2Dy - \gamma y & 6Bx + 2C \end{bmatrix}$$

Y el estado total.

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{2A\cos^3\theta}{r} + 2C + 2Dx \\ \sigma_y = \dfrac{2A\,\text{sen}^2\theta\cos\theta}{r} + 6Bx + 2C \\ \tau_{xy} = \dfrac{-2A\,\text{sen}\theta\cos^2\theta}{r} - 2Dy - \gamma \cdot y \end{cases}$$

Puede ponerse (x, y) en función de (r, θ), manteniendo la base (x, y).



$$x = R - r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\theta$$

Sustituyendo.

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{2A\cos^3\theta}{r} + 2C + 2DR - 2Dr\cos\theta \\ \sigma_y = \dfrac{2A\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{r} + 6BR - 6Br\cos\theta + 2C \\ \tau_{xy} = \dfrac{-2A\,\text{sen}\theta\cos^2\theta}{r} - 2Dr\,\text{sen}\theta - \gamma \cdot r \cdot \text{sen}\theta \end{cases}$$

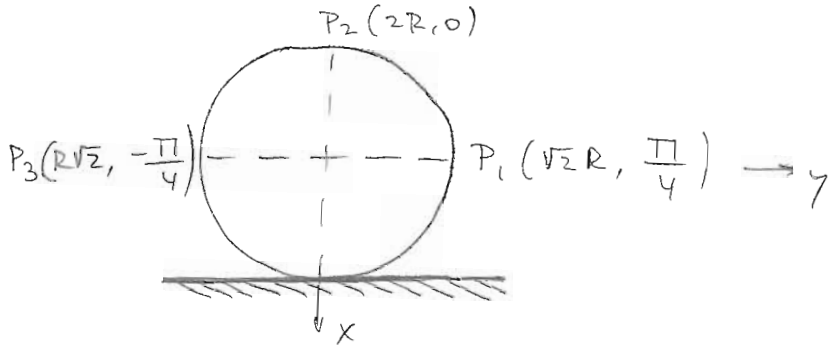
Para ver si es biarmónica, lo mejor es comprobar si ϕ_1 y ϕ_2 lo son por separado, ya que si es así, lo será ϕ_{TOTAL}.

$$\phi_1: \quad \nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{2A\cos\theta}{r}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$$\phi_2: \quad \Delta^2\phi = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta\left[2C + 2Dx + 6Bx + 2C\right] = 0 \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $\phi_{TOTAL} = \phi_1 + \phi_2$ es biarmónica

Ahora hay que aplicar las condiciones de contorno.



• P_1: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = 0 \rightarrow \frac{-2A \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2}}{\sqrt{2}\, R} - 2D\sqrt{2}R\frac{\sqrt{2}}{2} - \gamma \cdot \sqrt{2}R\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\frac{-A}{2R} - 2DR - \gamma R = 0 \rightarrow \boxed{A + 4R^2D + 2\gamma R^2 = 0} \quad (\mathrm{I})$$

$$\sigma_y = 0 \rightarrow \frac{2A \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2}}{\sqrt{2}\, R} + 6BR - 6B\sqrt{2}R\frac{\sqrt{2}}{2} + 2C = 0$$

$$\frac{A}{2R} + 6BR - 6BR + 2C = 0 \rightarrow \boxed{A + 4CR = 0} \quad (\mathrm{II})$$

• P_2: $\bar{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = 0 \rightarrow \frac{2A}{2R} + 2C + 2DR - 2D \cdot 2R = 0 \rightarrow \boxed{A + 2CR - 2DR^2 = 0} \quad (\mathrm{III})$$

$$\tau_{xy} = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

• P_3: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

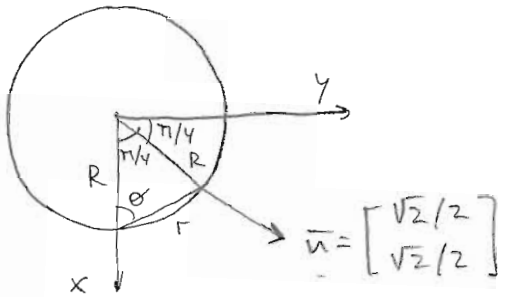
$$\tau_{xy} = 0 \rightarrow (\mathrm{I})$$

$$\sigma_y = 0 \rightarrow (\mathrm{II})$$

Resolviendo:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= -\gamma R^2 \\ C &= \frac{\gamma R}{4} \\ D &= \frac{-\gamma}{4} \end{aligned}}$$

Para sacar B: $\bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \pi \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$$

$\operatorname{sen}\theta = 0'924$

$\cos\theta = 0'383$

$$\frac{r}{2} = R\cos\theta \rightarrow r = 0'766\,R$$

$$\bar{t} = \bar{I}\cdot\bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sigma_x + \tau_{xy}\right] = 0 \rightarrow \frac{-2\gamma R^2\cdot 0'383^3}{0'766\,R} + 2\frac{\gamma R}{4} - \frac{2\gamma R}{4} + \frac{2\gamma}{4}\,0'766R\cdot 0'383 +$$

$$+ \frac{2\gamma R^2\cdot 0'924\cdot 0'383^2}{0'766\,R} + \frac{2\gamma}{4}\,0'766R\cdot 0'924 - \gamma\cdot 0'766R\cdot 0'924 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\tau_{xy} + \sigma_y\right] = 0 \rightarrow \frac{2\gamma R^2\cdot 0'924\cdot 0'383^2}{0'766\,R} + \frac{2\gamma}{4}\,0'766R\cdot 0'924 - \gamma\cdot 0'766R\cdot 0'924 -$$

$$- \frac{2\gamma R^2\cdot 0'383\cdot 0'924^2}{0'766\,R} + 6BR - 6B\,0'766R\cdot 0'383 + \frac{2\gamma R}{4} = 0$$

Resolviendo: $\boxed{B = \frac{\gamma}{12}}$

3) Leyes de tensiones en los diámetros horizontal y vertical

Sustituyendo los valores de las constantes anteriores:

$$\sigma_x = \frac{-2\gamma R^2\cos^3\theta}{r} + \frac{\gamma r\cos\theta}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{-2\gamma R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r} + \gamma\cdot R - \frac{\gamma\cdot r\cdot\cos\theta}{2}$$

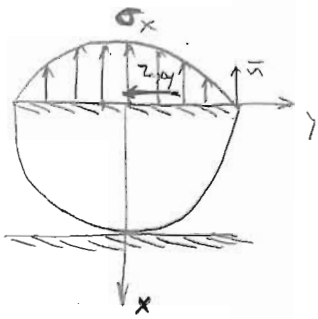
$$\tau_{xy} = \frac{2\gamma R^2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{r} - \frac{\gamma r\operatorname{sen}\theta}{2}$$

• Diámetro horizontal $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{bmatrix}$$

⊕ tracciones ⊕ izquierda

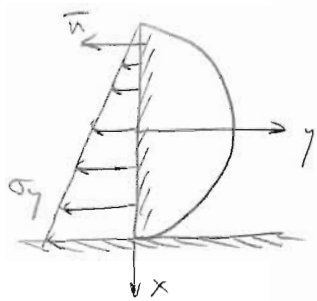
y	r	θ	sen θ	cos θ	σ_x	τ_{xy}
−R	+1'4142R	−45°	−0'7071	0'7071	0	0
−0'75R	+1'25R	−36'87°	−0'6	0'8	−0'3192γR	−0'239 γR
−0'5R	+1'118 R	−26'57°	−0'4472	0'8944	−0'78 γR	−0'39 γR
−0'25R	+1'031R	−14'036°	−0'2425	0'9701	−1'271 γR	−0'318 γR
0	R	0	0	1	−1'5 γR	0
0'25R	1'031 R	14'036°	0'2425	0'9701	−1'271 γR	0'318 γR
0'5R	1'118R	26'57°	0'4472	0'8944	−0'78 γR	0'39 γR
0'75R	1'25 R	36'87°	0'6	0'8	−0'3192γR	0'239 γR
R	1'4142R	45°	0'7071	0'7071	0	0



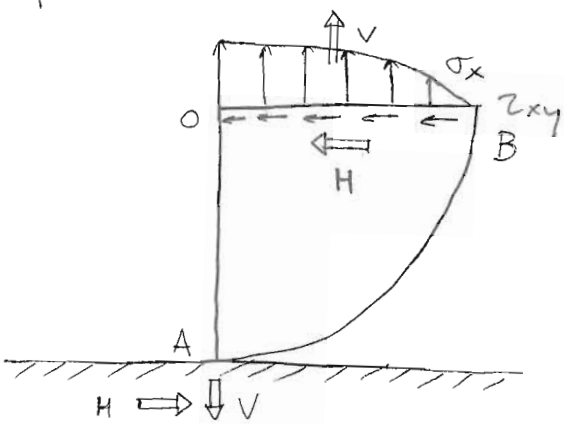
• Diámetro vertical : $\quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{bmatrix}$

⊕ arriba ⊕ tracciones

x	r	θ	sen θ	cos θ	τ_{xy}	σ_y
−R	2R	0	0	1	0	0
−0'75R	1'75 R	0	0	1	0	0'125 γR
−0'5R	1'5 R	0	0	1	0	0'25 γR
−0'25R	1'25R	0	0	1	0	0'375 γR
0	R	0	0	1	0	0'5 γR
0'25 R	0'75R	0	0	1	0	0'625 γR
0'5 R	0'5 R	0	0	1	0	0'75 γR
0'75 R	0'25R	0	0	1	0	0'875 γR
R	0	0	0	1	0	γR



4) Fuerza y momento resultantes respecto de A de las tensiones que actúan sobre el radio OB.



Las resultantes en OB son; con los valores del enunciado

$$\boxed{H = \int_0^R \tau_{xy}\, dy = 625 \text{ KN}}$$

$$\boxed{V = \int_0^R \sigma_x\, dy = -1963'5 \text{ KN}}$$

$$\boxed{M = H \cdot R - \int_0^R \sigma_x \cdot y\, dy = 0 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

NOTA: Problema en polares y cartesianos.

Varios 6.

Una barra delgada de sección A y longitud L gira en torno a uno de sus extremos con velocidad angular Ω. El material posee las siguientes características: peso específico γ, módulo de elasticidad E, coeficiente de Poisson ν. La única fuerza que actúa sobre la barra es la centrífuga. Los movimientos de ambos extremos están impedidos por la sustentación. Para este problema de elasticidad unidimensional se pide:

1. Obtener su ecuación de equilibrio de tensiones.

2. Obtener su ecuación de equilibrio de desplazamientos.

3. Determinar la función que proporciona el desplazamiento longitudinal de cada punto de la barra y calcular el valor numérico del desplazamiento del punto medio.

4. Determinar la ley de esfuerzos axiles y la máxima tensión en la barra.

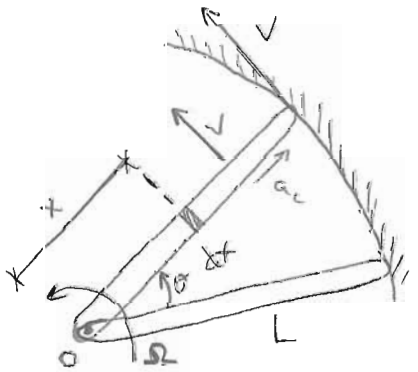
Enunciado: Varios 6

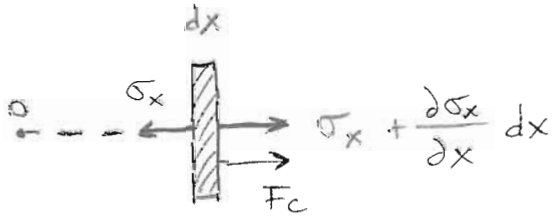
Una barra delgada de sección A y longitud L gira en torno a uno de sus extremos con velocidad angular Ω. El material posee las siguientes características: peso específico γ, módulo de elasticidad E, coeficiente de Poisson ν. La única fuerza que actúa en la barra es la centrípeta. Los movimientos de ambos extremos están impedidos por la sustentación. Para este problema de elasticidad unidimensional, se pide:

1) Obtener su ecuación de equilibrio en tensiones.
2) Obtener su ecuación de equilibrio en desplazamientos.
3) Determinar la función que proporciona el desplazamiento longitudinal de cada punto de la barra y calcular el valor numérico del desplazamiento del punto medio.
4) Determinar la ley de esfuerzos axiles y la máxima tensión en la barra.

Resolución:

1)





La fuerza centrípeta es: $F_c = dm \cdot a_c$ $\qquad dm = \gamma dV = \gamma \cdot A \cdot dx$

La velocidad angular es: $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$

Por lo tanto, la velocidad tangencial es: $V = \frac{ds}{dt} = \frac{x \cdot d\theta}{dt} = x \cdot \Omega$

Y la aceleración: $a_c = \frac{V^2}{x} = \frac{(\Omega x)^2}{x} = \Omega^2 \cdot x$

Por lo tanto: $F_c = dm \cdot a_c = \gamma \cdot A \cdot dx \cdot \Omega^2 \cdot x$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio es:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot A + \gamma A \cdot dx \cdot \Omega^2 x = 0$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{d\sigma_x}{dx} + \gamma \cdot \Omega^2 \cdot x = 0}$$ ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN TENSIONES

2) Ecuación de equilibrio en desplazamientos. Para pasar de tensiones a movimientos hay que obtener primero las deformaciones. Al estar en Elasticidad unidimensional:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \longrightarrow \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

Como $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \sigma_x = \frac{E \cdot du}{dx}$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio en tensiones:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = E \cdot \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\boxed{E \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma \cdot \Omega^2 \cdot x = 0}$$ ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN DESPLAZAMIENTOS

3) Función desplazamiento. Hay que integrar la ecuación anterior:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\gamma}{E} \Omega^2 \cdot x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\gamma}{E} \Omega^2 \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$u = \frac{-\gamma}{E} \Omega^2 \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Condiciones de contorno:

- en $x = 0$: $u = 0 \longrightarrow c_2 = 0$
- en $x = L$: $u = 0 \longrightarrow -\frac{\gamma}{E} \Omega^2 \frac{L^3}{6} + c_1 L = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\gamma}{E} \Omega^2 \frac{L^2}{6}$

Sustituyendo:

$$U = -\frac{\gamma}{E}\Omega^2\frac{x^3}{6} + \frac{\gamma}{E}\Omega^2\frac{L^2}{6}x$$

$$\boxed{U = \frac{\gamma\Omega^2}{6E}\left[L^2x - x^3\right]}$$ FUNCIÓN DESPLAZAMIENTO

En el punto medio:

$$U\left(x=\frac{L}{2}\right) = \frac{\gamma\Omega^2}{6E}\left[L^2\frac{L}{2} - \frac{L^3}{8}\right] = \frac{\gamma\Omega^2}{6E}\,\frac{3L^3}{8}$$

$$\boxed{U\left(x=\frac{L}{2}\right) = \frac{\gamma\Omega^2L^3}{16E}}$$

4) Ley de esfuerzo axiles y máxima tensión en la barra.

Axiles: $N = \sigma_x \cdot A = E \cdot \varepsilon_x \cdot A = E \cdot \frac{du}{dx} \cdot A$

$$\boxed{N = \frac{\gamma\Omega^2A}{6}\left[L^2 - 3x^2\right]}$$ LEY DE AXILES

Máxima tensión en la barra:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{N}{A} = \frac{\gamma\Omega^2}{6}\left[L^2 - 3x^2\right]$$

En los extremos es:

$$\sigma_x(x=0) = \frac{\gamma\Omega^2L^2}{6}$$

$$\sigma_x(x=L) = \frac{-\gamma\Omega^2L^2}{3}$$

Y en el interior:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{\gamma\Omega^2}{6}(-6x) = -\gamma\Omega^2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Por lo tanto, la máxima tensión en la barra es:

$$\boxed{\sigma_{MAX} = \frac{-\gamma \Omega^2 L^2}{3}}$$ (compresión)

NOTA: Elasticidad unidimensional.

Varios 7.

La figura muestra una chapa plana, cuadrada, de 7 m de lado, y delgada, sobre cuyo contorno actúa una tensión tangencial τ_{xy} = 25 MPa, uniforme. Sobre la chapa se señalan los puntos (cotas en cm) A (-7√2; -7√2), B (-14; 0), y C (-14; 14). Posteriormente se taladra en su centro O un agujero circular de 7 cm de radio. Se pide determinar en el punto B:

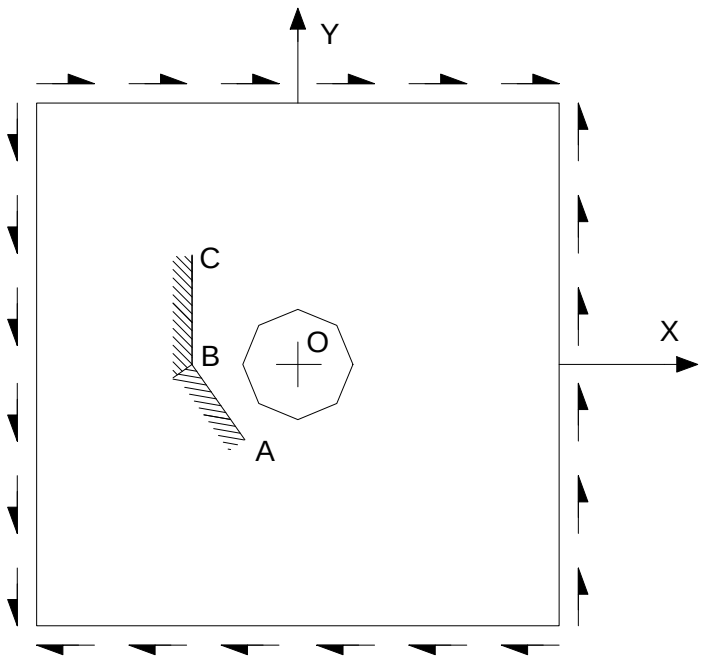
1. Las tensiones principales, con sus direcciones.
2. La tensión normal y tangencial sobre el plano BA.
3. La tensión normal y tangencial sobre el plano BC.

Para cada uno de los estados siguientes:

A. Antes de taladrar el agujero.

B. Después de taladrar el agujero.

(Examen de junio de 1993)



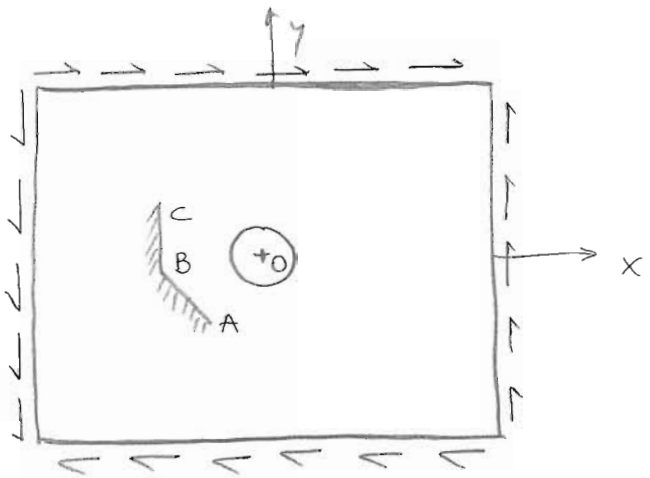
Enunciado: EXAMEN JUNIO 1993 Vari017 (50')

La figura muestra una chapa plana, cuadrada, de 7 m de lado, y delgada, sobre cuyo contorno actúa una tensión tangencial $\tau_{xy} = 25$ MPa uniforme. Sobre la chapa se señalan los puntos A $(-7\sqrt{2}, -7\sqrt{2})$, B $(-14, 0)$, C $(-14, 14)$. Posteriormente se taladra en su centro O un agujero circular de 7 cm de radio. Se pide determinar en el punto B:

1) Las tensiones principales, con sus direcciones.
2) La tensión normal y tangencial sobre el plano BA.
3) La tensión normal y tangencial sobre el plano BC.

Para cada uno de los estados siguientes:

A. Antes de taladrar el agujero.
B. Después de taladrar el agujero.



Resolución:

A.- CHAPA SIN AGUJERO:

Al ser chapa delgada y cargas en el plano, es tensión plana.
El tensor de tensiones genérico es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Aplicando las condiciones de contorno:

- CARA $x = 3'5$ m $\rightarrow$ $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 0 \text{ MPa} & \forall (x,y) \\ \tau_{xy} = 25 \text{ MPa} & \forall (x,y) \end{cases}$$

- CARA $y = 3'5$ m $\rightarrow$ $\bar{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\bar{t} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tau_{xy} = 25 \text{ MPa} & \forall (x,y) \\ \sigma_y = 0 \text{ MPa} & \forall (x,y) \end{cases}$$

Por lo tanto, estamos en un caso de tensión constante

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 25 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} \quad \text{en} \quad \forall (x,y)$$

Las tensiones principales y sus direcciones son

$$\sigma_I = 25 \text{ MPa} \longrightarrow \bar{n}_I = \begin{bmatrix} 0'7071 \\ 0'7071 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -25 \text{ MPa} \longrightarrow \bar{n}_{II} = \begin{bmatrix} 0'7071 \\ -0'7071 \end{bmatrix}$$

En el plano BA, las tensiones normales y tangenciales serán:

$$\overline{BA} = \bar{A} - \bar{B} = \begin{bmatrix} -7\sqrt{2} \\ -7\sqrt{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4'1 \\ -9'9 \end{bmatrix}$$

$$\bar{U}_{BA} = \begin{bmatrix} 0'3826 \\ -0'9239 \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{n}_{BA} = \begin{bmatrix} 0'9239 \\ 0'3826 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t} = \underline{T} \cdot \bar{n}_{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 25 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0'9239 \\ 0'3826 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9'565 \\ 23'0975 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

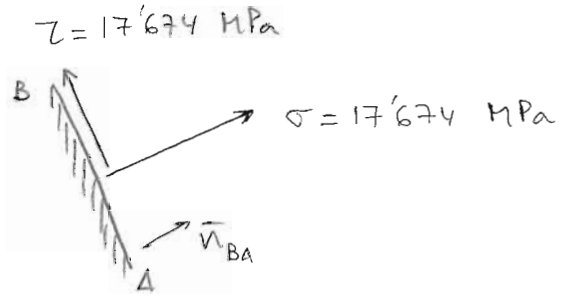
$$\sigma = \bar{n}_{BA}^T \cdot \bar{t} = \begin{bmatrix} 0'9239, 0'3826 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9'565 \\ 23'0975 \end{bmatrix} = 17'674 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma \, \bar{n}_{BA} = 17'674 \begin{bmatrix} 0'9239 \\ 0'3826 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16'329 \\ 6'762 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 9'565 \\ 23'0975 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16'329 \\ 6'762 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6'762 \\ 16'329 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

$$\tau = 17'674 \text{ MPa}$$

Gráficamente:



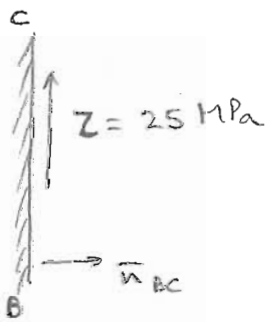
En el plano BC: $\bar{n}_{BC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$ (MPa)

$$\sigma = \bar{n}_{BC}^{T} \cdot \bar{t} = [1, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} = 0 \text{ MPa} \rightarrow \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

$$\tau = 25 \text{ MPa}$$

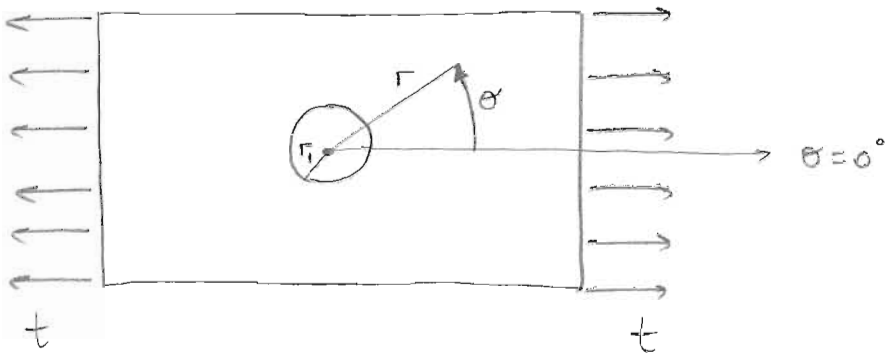
Gráficamente:



B – CHAPA CON AGUJERO:

Un taladro crea una concentración de tensiones en las cercanías, pero en los puntos suficientemente alejados puede considerarse que ya no afecta.

En el Formulario de la Escuela (Página 8) viene una solución en tensiones para puntos cercanos al taladro, en una chapa indefinida.

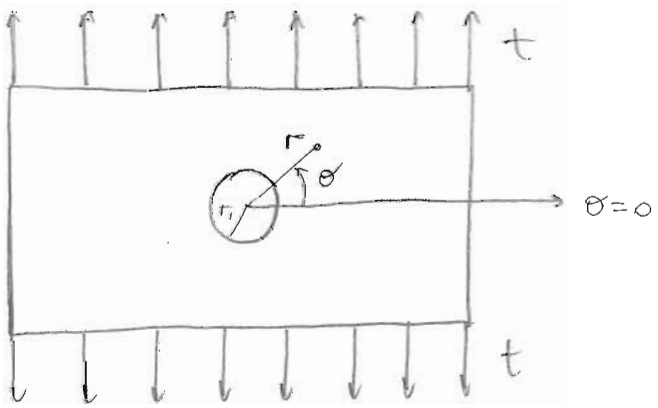


$$\sigma_r = \frac{t}{2}\left[1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right] + \frac{t}{2}\left[1 + 3\frac{r_1^4}{r^4} - 4\frac{r_1^2}{r^2}\right]\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{t}{2}\left[1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right] - \frac{t}{2}\left[1 + 3\frac{r_1^4}{r^4}\right]\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{t}{2}\left[1 - 3\frac{r_1^4}{r^4} + 2\frac{r_1^2}{r^2}\right]\operatorname{sen} 2\theta$$

La solución para el caso con cargas perpendiculares se halla cambiando θ por $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

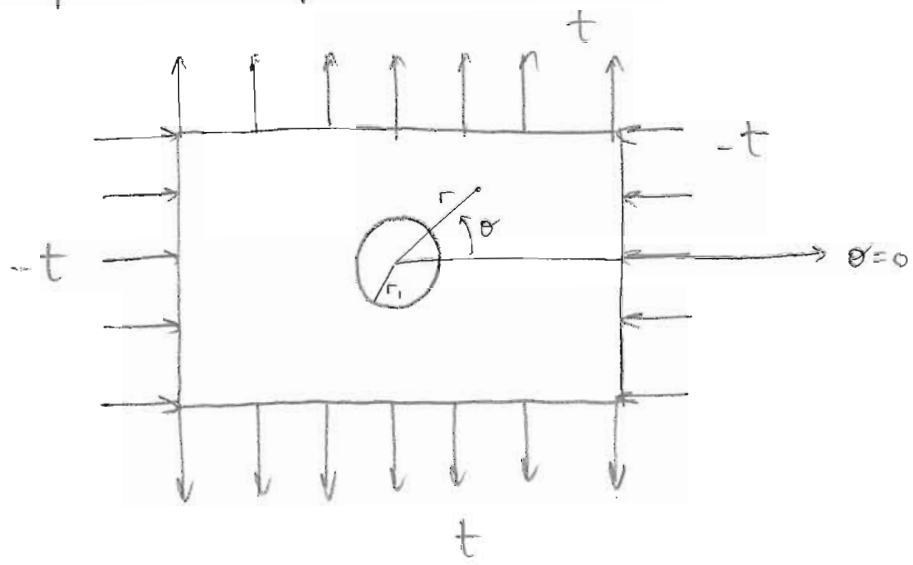


$$\sigma_r = \frac{t}{2}\left[1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right] - \frac{t}{2}\left[1 + 3\frac{r_1^4}{r^4} - 4\frac{r_1^2}{r^2}\right]\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{t}{2}\left[1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right] + \frac{t}{2}\left[1 + 3\frac{r_1^4}{r^4}\right]\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{t}{2}\left[1 - 3\frac{r_1^4}{r^4} + 2\frac{r_1^2}{r^2}\right]\operatorname{sen} 2\theta$$

Entonces, para el siguiente caso se tiene.

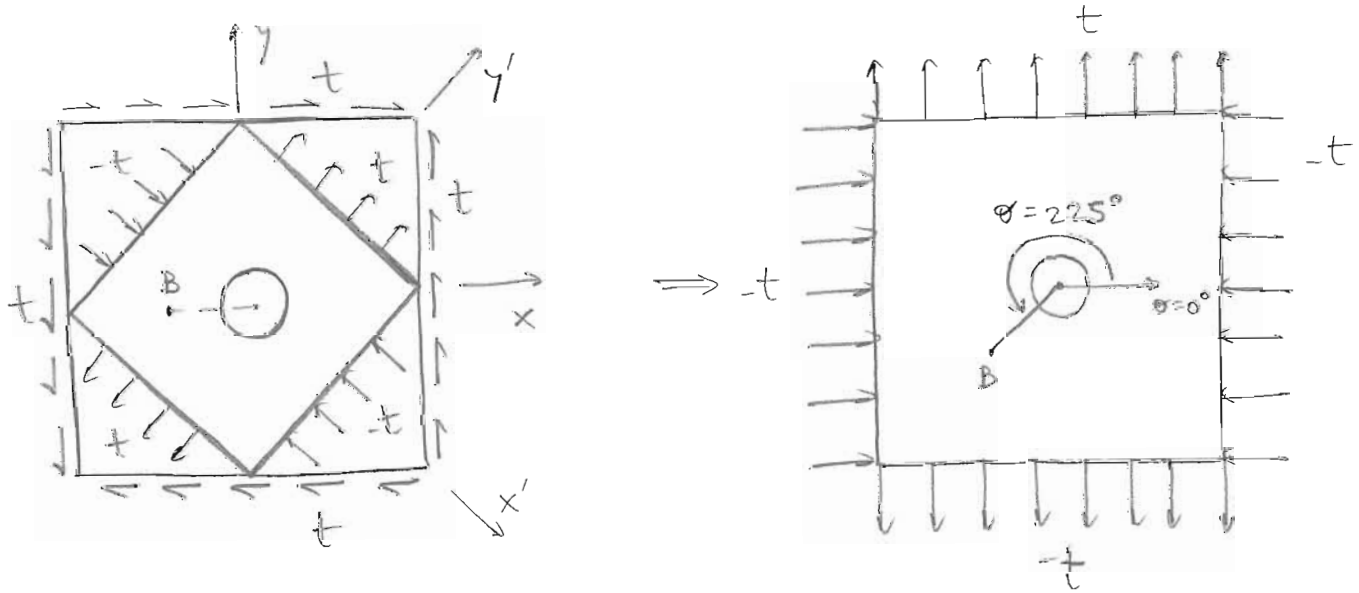


$$\sigma_r = -t\left[1 + 3\frac{r_1^4}{r^4} - 4\frac{r_1^2}{r^2}\right]\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = -t\left[1 + 3\frac{r_1^4}{r^4}\right]\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = t\left[1 - 3\frac{r_1^4}{r^4} + 2\frac{r_1^2}{r^2}\right]\operatorname{sen} 2\theta$$

Estas fórmulas se pueden emplear en nuestro caso:



Ya que si hago un cambio de ejes de (x,y) a (x',y) se tiene

$$I_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow I_{x'y'} = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

con la matriz de cambio de base $G = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Este tensor de tensiones sirve para los puntos suficientemente alejados del taladro. Cerca de éste, las tensiones son en el punto B:

$$\sigma_r^B = -t\left[1+3\frac{r_1^4}{r^4}-4\frac{r_1^2}{r^2}\right]\cos 2\theta = -25000\left[1+3\cdot\frac{0'07^4}{0'14^4}-4\cdot\frac{0'07^2}{0'14^2}\right]\cos 450 =$$

$$= -25000\left[1+0'1875-1\right]\cdot 0 = 0 \ KN/m^2$$

$$\sigma_\theta^B = -t\left[1+3\frac{r_1^4}{r^4}\right]\cos 2\theta = -25000\left[1+0'1875\right]\cdot 0 = 0 \ KN/m^2$$

$$\tau_{r\theta} = t\left[1-3\frac{r_1^4}{r^4}+2\frac{r_1^2}{r^2}\right]\operatorname{sen} 2\theta = 25000\left[1-0'1875+0'5\right]\cdot 1 = 32812'5 \ \frac{KN}{m^2}$$

En los ejes (r,θ), el tensor de tensiones en B es:

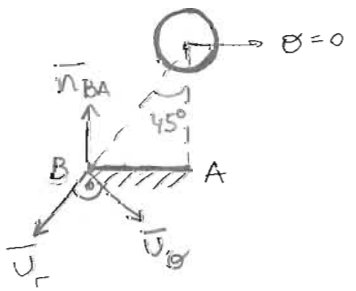
$$\underline{T}^B = \begin{bmatrix} 0 & 32812'5 \\ 32812'5 & 0 \end{bmatrix}$$

Y las tensiones principales en B:

$$\sigma_I = 32812'5 \ KN/m^2 \longrightarrow \bar{n}_I = \begin{bmatrix} 0'7071 \\ 0'7071 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{II} = -32812'5 \ KN/m^2 \longrightarrow \bar{n}_{II} = \begin{bmatrix} 0'7071 \\ -0'7071 \end{bmatrix}$$

Las tensiones normales y tangenciales sobre el plano BA.



$$\bar{n}_{BA} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{BA} = \underline{T}\cdot\bar{n}_{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 32812'5 \\ 32812'5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23201'94 \\ -23201'94 \end{bmatrix} (KN/m^2)$$

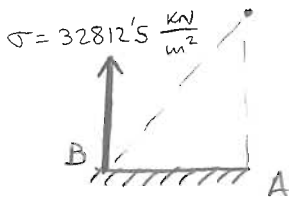
$$\sigma = \bar{n}_{BA}^T\cdot\bar{t} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{bmatrix} -23201'94 \\ -23201'94 \end{bmatrix} = 32812'5 \ KN/m^2$$

$$\bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n}_{BA} = 32812'5 \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23201'94 \\ -23201'94 \end{bmatrix} \ (KN/m^2)$$

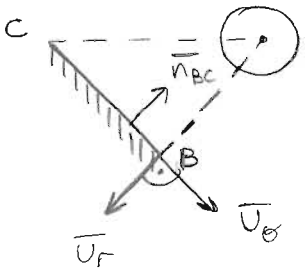
$$\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -23201'94 \\ -23201'94 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -23201'94 \\ -23201'94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ (KN/m^2)$$

$$\tau = 0 \ KN/m^2$$

Gráficamente.



Y en el plano BC:



$$\bar{n}_{BC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

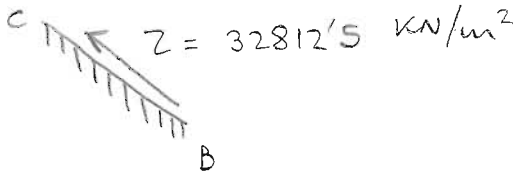
$$\bar{t}_{BC} = \bar{T} \cdot \bar{n}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 32812'5 \\ 32812'5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32812'5 \end{bmatrix} \ (KN/m^2)$$

$$\sigma = \bar{n}_{BC}^T \cdot \bar{t} = [-1, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -32812'5 \end{bmatrix} = 0 \ KN/m^2$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ (KN/m^2)$$

$$\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32812'5 \end{bmatrix} \ (KN/m^2) \rightarrow \tau = -32812'5 \ KN/m^2$$

Gráficamente:



NOTA: Chapa con taladro.

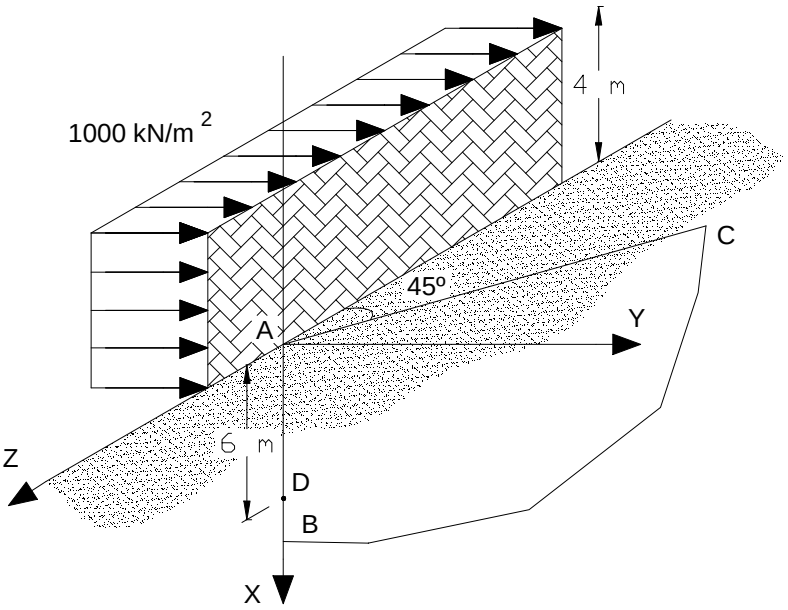
Varios 8.

Sobre la superficie de un terreno está empotrado un muro plano, vertical, de 4 metros de altura y cuya longitud se supone muy grande a ambos lados de la sección A. Si el empuje del viento es equivalente a una presión horizontal y uniforme indicada en la figura, se pide:

1. Dirección de la tensión total (vector tensión) asociada al plano vertical BAC a lo largo de la recta AB (AC está en la superficie del terreno).

2. Expresión del módulo de la tensión total (en kN/m^2) en función de la profundidad.

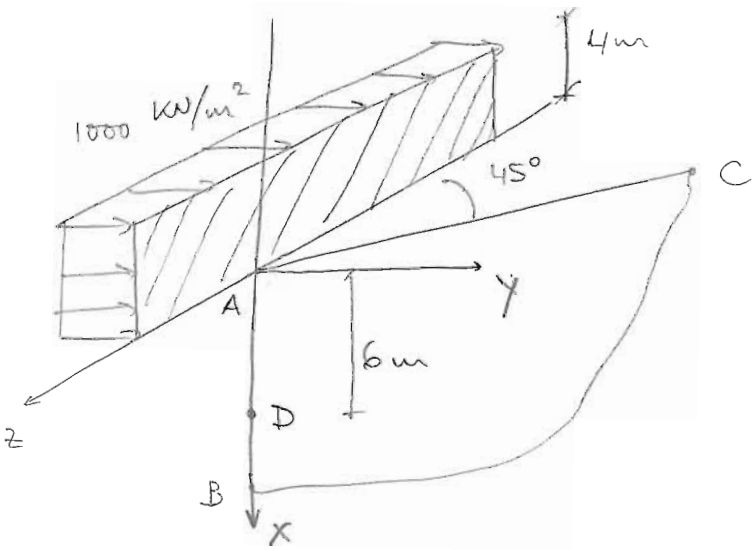
3. Representar gráficamente el vector tensión en el punto D, indicando claramente su módulo, dirección y sentido.



Enunciado: **EXAMEN DE DICIEMBRE 2001** Varios 8 (40')

Sobre la superficie de un terreno está empotrado un muro plano, vertical, de 4 metros de altura y cuya longitud se supone muy grande a ambos lados de la sección A. Si el empuje del viento es equivalente a una presión horizontal y uniforme indicada en la figura, se pide:

1) Dirección de la tensión total (vector tensión) asociada al plano vertical BAC a lo largo de la recta AB (AC está en la superficie del terreno).
2) Expresión del módulo de la tensión total (en KN/m^2) en función de la profundidad.
3) Representar gráficamente el vector tensión en el punto D, indicando claramente su módulo, dirección y sentido.



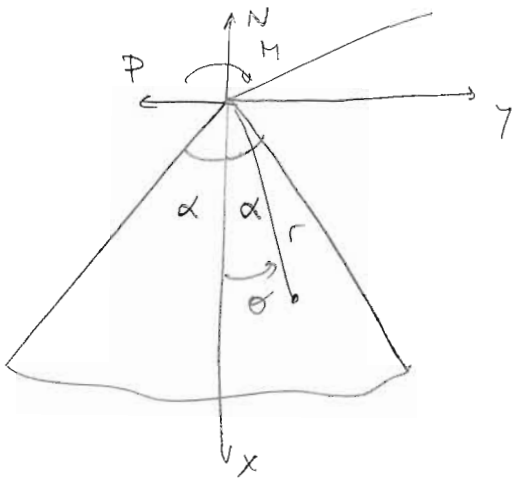
Resolución:

1) Este es un problema de cargas sobre terreno, o lo que es lo mismo, cargas sobre cuñas con $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
Sobre el eje z actúan las siguientes cargas:

$$P = 1000 \frac{KN}{m^2} \cdot 4\,m = 4000\ KN/m$$

$$M = 4000 \frac{KN}{m} \cdot 2\,m = 8000 \frac{KN \cdot m}{m}$$

En un voladizo de cargas oblicuas se tiene: (Formularios Escuela)



N, P y M son cargas por ud. de longitud. El tensor de tensiones en un punto genérico en $r\theta z$ es:

$$\underline{T}^{r\theta} = \begin{bmatrix} \dfrac{N\cos\theta}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha\right)r} + \dfrac{P\operatorname{sen}\theta}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha\right)r} - \dfrac{M\operatorname{sen}2\theta}{\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha-\alpha\cos2\alpha\right)r^2} & \dfrac{M(\cos2\theta-\cos2\alpha)}{(\operatorname{sen}2\alpha-2\alpha\cos2\alpha)r^2} \\ \dfrac{M(\cos2\theta-\cos2\alpha)}{(\operatorname{sen}2\alpha-2\alpha\cos2\alpha)r^2} & 0 \end{bmatrix}$$

En nuestro caso:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$N = 0$

$P = -4000$

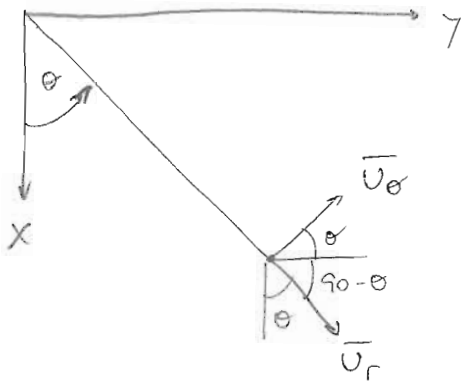
$M = 8000$

Sustituyendo

$$\underline{T}^{r\theta} = \frac{2546'48}{r}\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta - \dfrac{2\operatorname{sen}2\theta}{r} & \dfrac{1}{r}(\cos2\theta+1) \\ \dfrac{1}{r}(\cos2\theta+1) & 0 \end{bmatrix}$$

Suponemos que estamos en un caso de deformación plana. Lo mejor es pasar de coordenadas polares en 2D a cartesianas en 3D.

La matriz de cambio de base es:



$$G = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \nu\,[\sigma_r + \sigma_\theta]$$

$$\underline{T}^{r\theta z} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & 0 \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}^{xyz} = G^T \cdot \underline{T}^{r\theta z} \cdot G$$

Lo mejor es sustituir los valores numéricos en cada caso.

En el plano ABC: $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{xyz}$ $\qquad \underbrace{r = x \quad \theta = 0^\circ}_{\text{recta AB}}$

Por tanto:

$$\underline{T}^{r\theta z} = \frac{2546'48}{x} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{x} & 0 \\ \frac{2}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{5092'96}{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}^{xyz} = G^T \cdot \underline{T}^{r\theta z} \cdot G = \frac{5092'96}{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Cauchy:

$$\bar{t} = T \cdot \bar{n} = \frac{5092'96}{x^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3601'27}{x^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego la dirección de la tensión total es

$$\boxed{\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

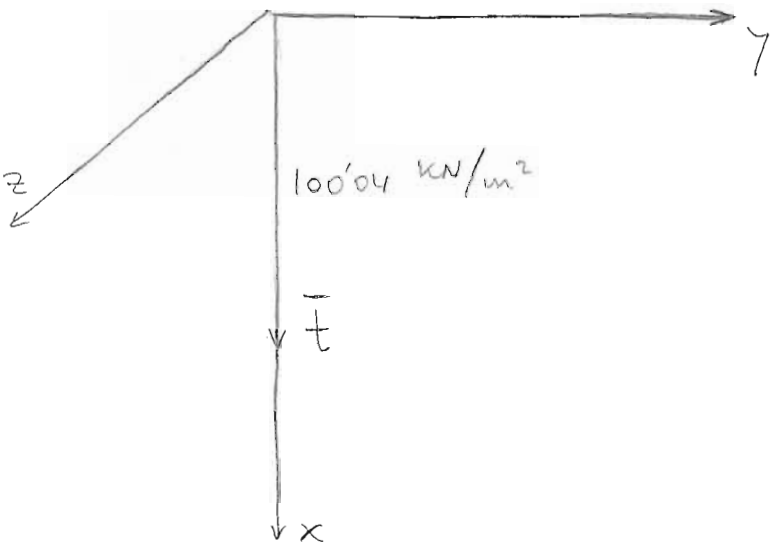
2) Módulo de la tensión total:

$$\boxed{|\bar{t}| = \frac{3601'27}{x^2} \quad (KN/m^2)}$$

3) El vector tensión en el punto D es:

$$\bar{t}_D = \frac{3601'27}{6^2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100'04\\0\\0\end{bmatrix} KN/m^2 \qquad |\bar{t}| = 100'04 \ \frac{KN}{m^2}$$

Gráficamente.



NOTA: Problema de carga en cuña

ANEJO

UNIDADES

Longitud:

1 m = 100 cm = 1000 mm

1 cm = 0.01 m = 10 mm

1 mm = 10^{-3} m = 0.1 cm

Fuerza:

1 kN = 1000 N = 100 kp = 0.1 t

1 N = 10^{-3} kN = 0.1 kp = 10^{-4} t

1 kp = 0.01 kN = 10 N = 10^{-3} t

1 t = 10000 N = 1000 kp = 10 kN

Tensión:

1 MPa = 10^6 Pa = 10^6 N/m^2 = 100 t/m^2 = 10 kp/cm^2 = 10 bar = 1 N/mm^2 = 1000 kN/m^2

1 kN/m^2 = 0.1 t/m^2 = 0.01 kp/cm^2 = 0.01 bar = 10^{-3} N/mm^2 = 10^{-3} MPa

1 t/m^2 = 10 kN/m^2 = 0.1 kp/cm^2 = 0.1 bar = 0.01 MPa

1 kp/cm^2 = 1 bar = 100 kN/m^2 = 10 t/m^2 = 0.1 MPa

FÓRMULAS DE INTERÉS

Fórmulas trigonométricas

$$sen^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$$

$$sen(2\cdot\vartheta) = 2\cdot sen\vartheta\cdot\cos\vartheta$$

$$\cos(2\cdot\vartheta) = 2\cdot\cos^2\vartheta - 1$$

$$sen^2\vartheta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot\vartheta)$$

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot\vartheta)$$

Derivadas

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'\cdot u$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$y = arctg\vartheta \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = sen\vartheta \Rightarrow y' = \cos\vartheta$$

$$y = \cos\vartheta \Rightarrow y' = -sen\vartheta$$

$$y = tg\vartheta \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2\vartheta}$$

$$y = \cot g\vartheta \Rightarrow y' = \frac{-1}{sen^2\vartheta}$$

$$y = sen(k\cdot\vartheta) \Rightarrow y' = k\cdot\cos(k\cdot\vartheta)$$

$$y = \cos(k\cdot\vartheta) \Rightarrow y' = -k\cdot sen(k\cdot\vartheta)$$

Integrales

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int \vartheta\cdot sen\vartheta\cdot d\vartheta = -\vartheta\cdot\cos\vartheta + sen\vartheta$$

$$\int \vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot d\vartheta = \vartheta\cdot sen\vartheta + \cos\vartheta$$

$$\int \vartheta\cdot sen\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{sen(2\cdot\vartheta) - 2\cdot\vartheta\cdot\cos(2\cdot\vartheta)}{8}$$

$$\int sen\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{-\cos(2\cdot\vartheta)}{4}$$

$$\int sen^2\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{2\cdot\vartheta - sen(2\cdot\vartheta)}{4}$$

$$\int \cos^2\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{2\cdot\vartheta + sen(2\cdot\vartheta)}{4}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Son del siguiente tipo:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n \cdot y = 0 \qquad \text{con} \quad y(x)$$

El procedimiento para resolverlas es el siguiente:

1) Se forma la ecuación característica:

$$k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + ... + a_n = 0$$

2) Se hallan las raíces de la ecuación característica:

$$k_1, k_2, ..., k_n$$

3) Según el carácter de las raíces, se escriben las soluciones particulares, linealmente independientes, partiendo de lo siguiente:

   a) A toda raíz simple "k", corresponde una solución particular:

   $$e^{k \cdot x}$$

   b) A todo par de raíces complejas conjugadas [$k^{(1)} = \alpha + i \cdot \beta$] y [$k^{(2)} = \alpha - i \cdot \beta$] le corresponden dos soluciones particulares:

   $$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \qquad \text{y} \qquad e^{\alpha \cdot x} \cdot sen(\beta \cdot x)$$

   c) A toda raíz real "k" de orden de multiplicidad "r", corresponden r soluciones particulares linealmente independientes:

   $$e^{k \cdot x}, \; x \cdot e^{k \cdot x}, \; ....., \; x^{r-1} \cdot e^{k \cdot x}$$

   d) A todo par de raíces complejas conjugadas de orden de multiplicidad "r" ($\alpha + i \cdot \beta$, $\alpha - i \cdot \beta$), corresponden $2 \cdot r$ soluciones particulares:

   $$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x), \; x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x), \; ....., \; x^{r-1} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

   $$e^{\alpha \cdot x} \cdot sen(\beta \cdot x), \; x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot sen(\beta \cdot x), \; ....., \; x^{r-1} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot sen(\beta \cdot x)$$

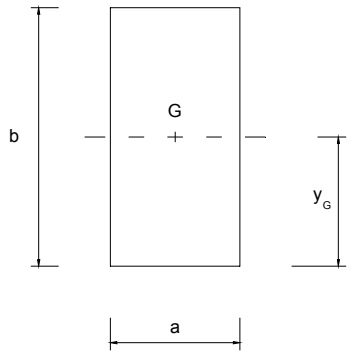
El número de estas soluciones particulares es igual al grado de la ecuación característica o, lo que es lo mismo, al orden de la ecuación diferencial dada.

4) Una vez encontradas "n" soluciones linealmente independientes (y_1 , y_2 , ... , y_n), la solución general es:

$$\boxed{y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n}$$

Donde c_1 , c_2 , ... , c_n son constantes arbitrarias.

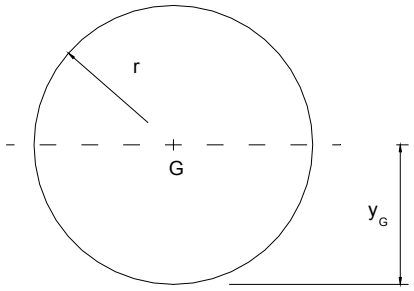
CARACTERÍSTICAS DE SECCIONES



$$y_G = \frac{b}{2}$$

$$\Omega = a \cdot b$$

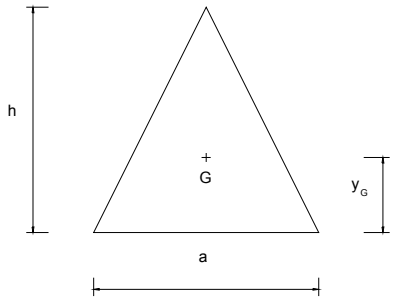
$$I_{GX} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot b^3$$



$$y_G = r$$

$$\Omega = \pi \cdot r^2$$

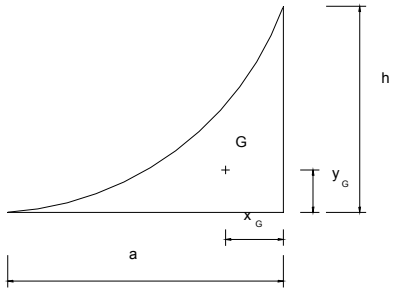
$$I = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4$$



$$y_G = \frac{1}{3} \cdot h$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

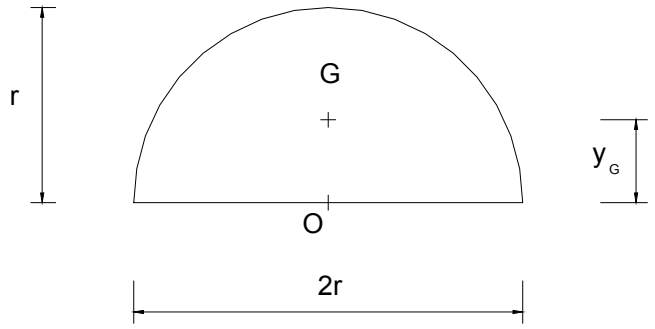
$$I_{GX} = \frac{1}{36} \cdot a \cdot h^3$$



$$x_G = \frac{1}{4} \cdot a$$

$$y_g = \frac{3}{10} \cdot h$$

$$\Omega = \frac{1}{3} \cdot a \cdot h$$

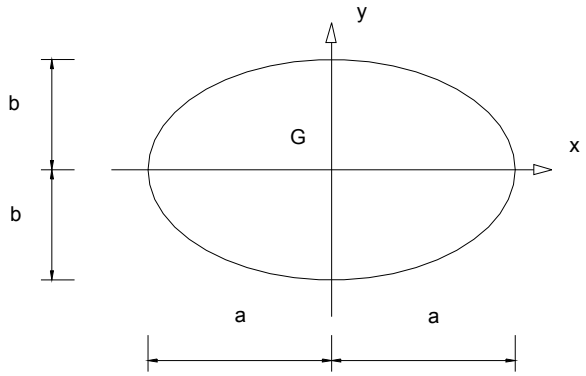


$$y_G = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$I_{XO} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^4$$

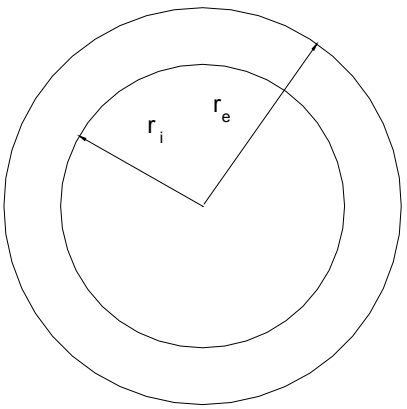
$$I_{XG} = \frac{(9 \cdot \pi^2 - 64)}{72 \cdot \pi} \cdot r^4$$



$$\Omega = \pi \cdot a \cdot b$$

$$I_{XG} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a \cdot b^3$$

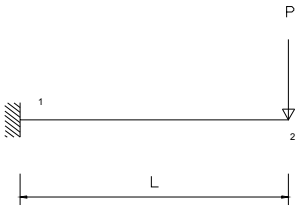
$$I_{YG} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^3 \cdot b$$



$$\Omega = \pi \cdot (r_e^{\ 2} - r_i^{\ 2})$$

$$I = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (r_e^{\ 4} - r_i^{\ 4})$$

FÓRMULAS EN VIGAS SIMPLES

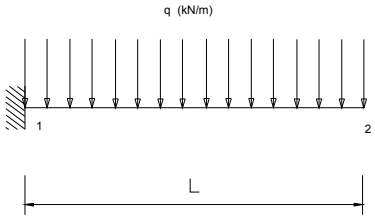


$$\vartheta_2 = \frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$v_2 = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

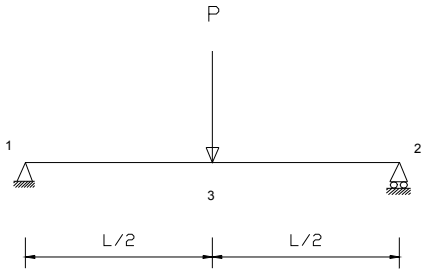
$$\vartheta_2 = \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

$$v_2 = \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$



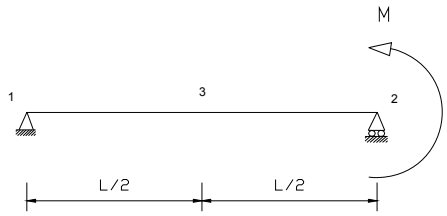
$$\vartheta_2 = \frac{q \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$v_2 = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$$



$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{P \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I}$$

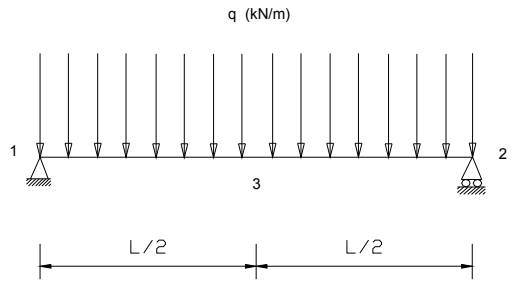
$$v_3 = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$



$$\vartheta_1 = \frac{M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I}$$

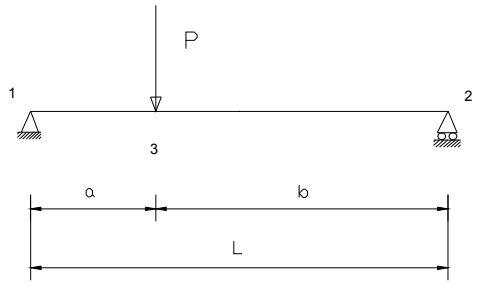
$$\vartheta_2 = \frac{M \cdot L}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$v_3 = \frac{M \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I}$$



$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

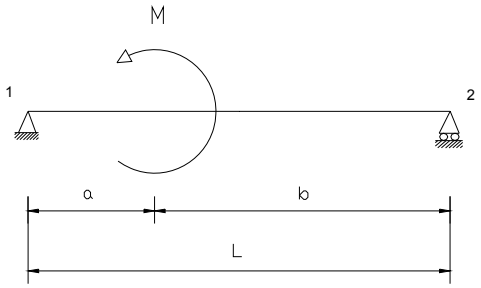
$$v_3 = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$



$$\vartheta_1 = \frac{P \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L + b)$$

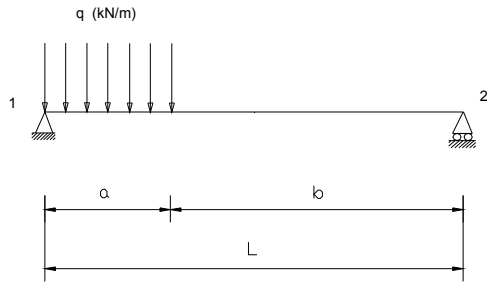
$$\vartheta_2 = \frac{P \cdot a \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L + a)$$

$$v_3 = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot L}$$



$$\vartheta_1 = \frac{M}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L^2 - 3 \cdot b^2)$$

$$\vartheta_2 = \frac{M}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (L^2 - 3 \cdot a^2)$$



$$\vartheta_1 = \frac{q \cdot a^2}{24 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (4 \cdot a \cdot L - a^2 - 4 \cdot L^2)$$

$$\vartheta_2 = \frac{q \cdot a^2}{24 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot (2 \cdot L^2 - a^2)$$